F18T1A5

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad \text{und} \quad y(0) = 0. \tag{$\star$}$$

a) Bestimme alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von ($\star$). Ein expliziter Nachweis, dass es keine weiteren Lösungen gibt, ist nicht erforderlich.

b) Bestimme alle $b \in \mathbb{R}$, so dass es eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung von ($\star$) gibt, welche neben $y(0) = 0$ auch $y(1) = b$ erfüllt.

Zu a):

Wir verwenden den Satz über das Trennen von Variablen. Dieser sagt zunächst aus, dass $\mu \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, da 0 Nullstelle von $y \mapsto \sqrt[3]{y^2}$ ist. Wir erhalten einen weiteren Kandidaten λ für eine Lösung durch den Ansatz:

$$3 \cdot \lambda(t))^{1/3} = \left[3 \cdot y^{1/3}\right]_0^{\lambda(t)} = \int_0^{\lambda(t)} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\, \mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}t = t$$

Definiere also $\begin{array}{cccc} \lambda: & A_{+/-} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \left(\frac{t}{3}\right)^3 \end{array}$ Es folgt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\lambda'(t) = 3 \cdot \left(\frac{t}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = (\lambda(t))^{2/3} = \sqrt[3]{(\lambda(t))^2}.$$

Daher ist λ eine Lösung zum obigen Anfangswertproblem.
Um alle auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungen zu erhalten, müssen wir geeignete Lösungen geeignet zusammenstückeln. Wegen

$$\lim_{t\to 0} \mu(t) = 0 = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \text{ und } \lim_{t\to 0} \mu'(t) = 0 = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{9} = \lim_{t\to 0} \lambda'(t)$$

lassen sich μ und λ bei 0 zusammenstückeln und damit sind die Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{array}{llll} \rho_1: & t \mapsto 0 & \rho_2: & t \mapsto \lambda(t) \\ \rho_{3,\tau}: & t \mapsto \begin{cases} 0 & t \leq \tau \\ \lambda(t-\tau) & t > \tau \end{cases} & \rho_{4,\tilde{\tau}}: & t \mapsto \begin{cases} \lambda(t-\tilde{\tau}) & t \leq \tilde{\tau} \\ 0 & t > \tilde{\tau} \end{cases}. \end{array}$$

für beliebige Konstanten $\tau \geq 0, \tilde{\tau} \leq 0$.

Zu b):

Behauptung: Die Menge der gesuchten $b \in \mathbb{R}$ (wir bezeichnen sie mit B) ist gegeben durch das Intervall $[0, \frac{1}{27}]$.

Beweis: Die in a) genannten Funktionen sind gerade diejenige, die das Anfangswertproblem $(\star)$ lösen. Insofern gilt:

$$\begin{aligned} B &= \{b \in \mathbb{R} \mid \exists y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \text{ ist Lösung von } (\star) \text{ mit } y(1) = b\} \\ &= \{\varphi(1) \mid \exists \tau \geq 0, \tilde{\tau} \leq 0 : \varphi \in \{\rho_1, \rho_2, \rho_{3,\tau}, \rho_{4,\tilde{\tau}}\}\} \\ &= \{\rho_1(1)\} \cup \{\rho_2(1)\} \cup \{\rho_{3,\tau}(1) \mid \tau \geq 0\} \cup \{\rho_{4,\tilde{\tau}}(1) \mid \tilde{\tau} \leq 0\} \end{aligned}$$

Einerseits ist $\rho_{4,\tilde{\tau}}(t) = 0$ für alle $t > \tilde{\tau}$ - wegen $\tilde{\tau} \leq 0$ also insbesondere für $t = 1$. Andererseits ist für $\tau \geq 1$ auch $\rho_{3,\tau}(t) = 0$ für $t \leq \tau$, also insbesondere für $t = 1$. Hieraus folgt

$$\{\rho_{3,\tau}(1) \mid \tau \geq 0\} = \{\rho_{3,\tau}(1) \mid \tau \in [0, 1]\} = [\rho_{3,1}(1), \rho_{3,0}(1)] = \left[0, \frac{1}{27}\right],$$

wobei wir hier verwendet haben, dass die Zuordnung $\tau \mapsto \frac{(1-\tau)^3}{27}$ streng monoton fallend und stetig ($\to$ Zwischenwertsatz) ist. Zusammengenommen ist dann:

$$\begin{aligned} B &= \{\rho_1(1)\} \cup \{\rho_2(1)\} \cup \{\rho_{3,\tau}(1) \mid \tau \geq 0\} \cup \{\rho_{4,\tilde{\tau}}(1) \mid \tilde{\tau} \leq 0\} \\ &= \{0\} \cup \left\{\frac{1}{27}\right\} \cup \{0\} \cup \left[0, \frac{1}{27}\right] \\ &= \left[0, \frac{1}{27}\right] \end{aligned}$$