

F18T1A4

- a) Gib eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, die folgende Lösungen besitzen.

$$y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2 \exp(3x) + \sin(3x)$$

$$y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3 \exp(-2x) + \sin(3x)$$

$$y_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-2x) + 5 \exp(3x) + \sin(3x)$$

- b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y(x) = \sin(ax) + a \cos(x)$$

mindestens eine unbeschränkte Lösung?

Zu a):

Es gilt

$$y_1''(x) = 2 \cdot 3^2 \cdot \exp(3x) - 9 \sin(3x) = 9y_1(x) - 18 \sin(3x)$$

$$y_2''(x) = 4 \cdot 3 \exp(-2x) + 9 \sin(3x) = 4y_2(x) + 5 \sin(3x)$$

$$y_3''(x) = 4 \exp(-2x) + 9 \cdot 5 \exp(3x) + 9 \sin(3x) = 9y_3(x) - 5 \exp(-2x).$$

Demnach sind $y_{1/2/3}$ Lösungen der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$y_1 : \quad y''(x) - 9y(x) = -18 \sin(3x)$$

$$y_2 : \quad y''(x) - 4y(x) = 5 \sin(3x)$$

$$y_3 : \quad y''(x) - 9y(x) = 5 \exp(-2x)$$

Zu b):

Die homogene Differentialgleichung wird gelöst von den beiden Funktionen

$$x \mapsto \sin(3x) \quad x \mapsto \cos(3x).$$

die gleichzeitig auch ein reelles Fundamentalsystem zur homogenen Differentialgleichung bilden. Für die partikuläre Lösung mache den Ansatz

$$x \mapsto A \sin(ax) + B \cos(ax) + C \sin(x) + D \cos(x)$$

Einsetzen führt auf

$$(9 - a^2)A \sin(ax) + (9 - a^2)B \cos(ax) + 8C \sin(x) + 8D \cos(x) \stackrel{!}{=} \sin(ax) + a \cos(x)$$

- also für $a \neq \pm 3$ zu $A = \frac{1}{9-a^2}$, $D = \frac{a}{8}$, $B = C = 0$. Daher hat im Fall $a \neq \pm 3$ jede beliebige Lösung der Differentialgleichung die Form

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x) + \frac{1}{9-a^2} \sin(ax) + \frac{a}{8} \cos(x) \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und ist daher beschränkt. In den Fällen $a = \pm 3$ machen wir zunächst den Ansatz $\varphi : x \mapsto x(A \sin(ax) + B \cos(ax))$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (A \sin(ax) + B \cos(x)) + x(Aa \cos(ax) - Ba \sin(ax)) \\ &= \sin(ax) \cdot (A - Bax) + \cos(ax) \cdot (B + Aax) \\ \varphi''(x) &= a \cos(ax)(A - Bax) - \sin(ax) \cdot Ba - a \sin(ax)(B + Aax) + \cos(ax) \cdot Aa \\ &= \sin(ax) \cdot (-Ba - aB - Aa^2x) + \cos(ax) \cdot (aA - Ba^2x + Aa) \\ &= -2Ba \sin(ax) + 2Aa \cos(ax) - a^2(A \sin(ax) + B \cos(ax)) \\ &= -2Ba \sin(ax) + 2Aa \cos(ax) - 9\varphi(x) \\ &\stackrel{!}{=} \sin(ax) - 9\varphi(x) \end{aligned}$$

Also ist $A = 0, B = \frac{-1}{2a} = \mp \frac{1}{6}$. Insgesamt lautet die partikuläre Lösung also $x \mapsto \mp \frac{x}{6} \cdot \cos(ax) + \frac{a}{8} \cos(x)$. Eine beliebige Lösung der Differentialgleichung hat also die Form

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x) \mp \frac{x}{6} \cdot \cos(3x) \pm \frac{3}{8} \cos(x) \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und ist damit unbeschränkt. Zur obigen Differentialgleichung gibt es also genau in den Fällen $a = \pm 3$ eine unbeschränkte Lösung.