F18T1A3

Wie üblich identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto x + iy$. Sei

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{wenn } z \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$$

a) Zeige, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und dass f in $(0,0)$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt.

b) Zeige, dass f in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar ist. Begründe, warum dies nicht im Widerspruch zum Ergebnis von Teil a) steht.

Zu a):

Es gilt für $z = x + iy \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^4} &= \frac{1}{(x+iy)^4} = \frac{(x-iy)^4}{|x+iy|^4} = \frac{x^4 - 4ix^3y - 6x^2y^2 + 4ixy^3 + y^4}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \underbrace{\frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^4}}_{:=u(x,y)} + i \underbrace{\frac{4xy^3 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^4}}_{:=v(x,y)}\end{aligned}$$

Für $z = x + iy \neq 0$ ist damit

$$f(z) = e^{-u(x,y) - iv(x,y)} = e^{-u(x,y)} \cdot (\cos(v(x,y)) - i \sin(v(x,y))).$$

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung berechne zunächst

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{(4x^3 - 12xy^2) \cdot (x^2+y^2)^4 - (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \cdot 4(x^2+y^2)^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^8} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{(4y^3 - 12x^2y) \cdot (x^2+y^2)^4 - (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \cdot 4(x^2+y^2)^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^8} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{(4y^3 - 12x^2y) \cdot (x^2+y^2)^4 - (4xy^3 - 4x^3y) \cdot 4(x^2+y^2)^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^8} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{(12xy^2 - 4x^3) \cdot (x^2+y^2)^4 - (4xy^3 - 4x^3y) \cdot 4(x^2+y^2)^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^8}\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{Re}(f_{\mathbb{R}}(x,y))}{\partial x} &= e^{-u(x,y)} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \sin(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right) \overset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{\partial \mathrm{Re}(f_{\mathbb{R}}(x,y))}{\partial y} &= e^{-u(x,y)} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \sin(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) \overset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{\partial \mathrm{Im}(f_{\mathbb{R}}(x,y))}{\partial x} &= -e^{-u(x,y)} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right) \overset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{\partial \mathrm{Im}(f_{\mathbb{R}}(x,y))}{\partial y} &= -e^{-u(x,y)} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \cos(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) \overset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Wir sehen: $f_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, aber auch bei 0 stetig und stetig partiell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(f_{\mathbb{R}}(0,0))}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \mathrm{Im}(f_{\mathbb{R}}(0,0))}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{Re}(f_{\mathbb{R}}(x,y))}{\partial y} = 0 = -0 = \frac{\partial \mathrm{Im}(f_{\mathbb{R}}(x,y))}{\partial x}$$

Zu b):

Angenommen f ist in $z = 0$ komplex differenzierbar. Weil f auch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar ist, ist f eine ganz-holomorphe Funktion und bei 0 insbesondere stetig. Die Folgenglieder der Folge $(\frac{e^{i\pi/4}}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren offensichtlich gegen Null; andererseits ist

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{z_n^4}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{n^4}{e^{i\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp(n^4) = \infty$$

Damit kann f bei 0 nicht stetig und erst recht nicht komplex differenzierbar sein.