F18T1A3

Wie üblich identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit C durch die $\mathbb{R}$−lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to C$; $(x, y) \to x + iy$.

Sei $f: C \to C; z \to \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right); z \neq 0 \\ 0 \quad ; z = 0 \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f in (0, 0) partiell differenzierbar ist und dass f in (0, 0) die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass f in z = 0 nicht komplex differenzierbar ist. Begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Ergebnis von Teil (a) steht.

Zu a)

$f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^4}\right); x \neq 0 \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}$ ist differenzierbar, da auf $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ die Ableitung

$\left(f|_{\mathbb{R}}\right)'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^4}\right)\frac{4}{x^5}$ nach Kettenregel gegeben ist und gilt

$\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\exp\left(-\frac{1}{x^4}\right) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x\exp\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \lim\limits_{y\nearrow\infty} y\exp\left(-y^4\right) = 0$ (mit Subst. y = 1/x) und

analog $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\exp\left(-\frac{1}{x^4}\right) - 0}{x - 0} = 0$. Also ist $\left(f|_{\mathbb{R}}\right)'(0) = 0$

Analog zeigt man, dass $f|_{i\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(iy)^4}\right); y \neq 0 \\ 0 \quad ; y = 0 \end{cases}$ differenzierbar ist,

somit ist f in (0,0) partiell differenzierbar mit f'(0,0) = 0

Außerdem gilt $0 = \left(f|_{\mathbb{R}}\right)'(0) = \partial_x f(0,0) = \partial_x REf(0,0) + i\,\partial_x IMf(0,0)$ und

$0 = \left(f|_{i\mathbb{R}}\right)'(0) = \partial_y f(0,0) = \partial_y REf(0,0) + i\,\partial_y IMf(0,0)$. Insbesondere

$\partial_x REf(0,0) = 0 = \partial_y IMf(0,0)$ und $\partial_x IMf(0,0) = 0 = -\partial_y REf(0,0)$. Also erfüllt f in (0,0) die Cauchy-Riemannschen DGLen.

Zu b)

f ist in z=0 nicht komplex differenzierbar, da f in 0 nicht stetig ist. Betrachte z.B. $w_n := \dfrac{1}{\sqrt[4]{2\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{8}n\right)}$ mit $f\left(w_n\right) = \exp\left(-2\pi i n^4\right) = 1$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(w_n\right) = 1 \neq f(0)$.

Dies widerspricht dem Ergebnis von (a) nicht, weil die Äquivalenz holomorph ⇔ stetig partiell differenzierbar plus C-R-DGL nur auf einer nichtleeren offenen Teilmenge gilt, nicht in einem einzelnen Punkt.