F18T1A2

Beweise oder widerlege folgende Aussagen.
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei beliebige Funktionen. Dann gilt:

a) Ist f stetig, dann ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int\limits_0^{g(x)} f(t)dt$ ebenfalls stetig.

b) Ist f stetig und g differenzierbar, dann ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int\limits_0^{g(x)} f(t)dt$ ebenfalls differenzierbar.

c) Ist f beschränkt und differenzierbar und existiert $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ im eigentlichen Sinne (d.h. dieser Grenzwert existiert und hat einen endlichen Wert), dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Zu a):

FALSCH! Z.B. $f = 1$, $g = \mathbb{1}_{[1,2]}$

$$h(x) = \begin{cases} \int\limits_0^0 dt = 0 & x \in [0,1[\Rightarrow g(x) = 0 \\ \int\limits_0^1 dt = 1 & x \in [1,2] \Rightarrow g(x) = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \; h \text{ ist nicht stetig bei } 1$$

Zu b):

WAHR! Da f stetig ist, gibt es nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int\limits_0^x f(t)dt = F(x)$.

$$\Rightarrow h = F \circ g \quad \Rightarrow h'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zu c):

Angenommen $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = c > 0$.
Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in]0, \frac{c}{2}[$ ein $N(\varepsilon) > 0$ sodass $f'(x) > \varepsilon$ für alle $x > N(\varepsilon)$ gilt.

$$f(x) = f(N(\varepsilon)) + \int\limits_{N(\varepsilon)}^{x} f'(t)dt \geq f(N(\varepsilon)) + \varepsilon(x - N(\varepsilon)) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

also ist f nicht beschränkt.

Angenommen $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = c < 0$.
$\Rightarrow$ es gibt $M > 0$ mit $f(x) \leq \frac{c}{2}$ für $x \geq M$

$$f(x) = f(M) + \int\limits_{M}^{x} f'(t)dt \leq f(M) + \frac{c}{2}(x - M) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty$$

also ist f nicht beschränkt.