F18T1A1

Beweise oder widerlege folgende Aussagen (uneigentliche Integrale und Grenzwerte haben in dieser Aufgabe im Falle der Existenz immer einen endlichen Wert). Für alle stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

a) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

b) Wenn das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$.

c) Wenn das uneigentliche Integral $\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Lösung

Wir verwenden den Lebesgueschen Integralbegriff. Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ existiert das Integral $\int_A f(x)\ \mathrm{d}\lambda(x)$, wenn gilt:

1. f ist eine messbare Funktion.
2. $\int_A |f(x)|\ \mathrm{d}\lambda(x) < \infty$.

Da f laut Aufgabenstellung stetig, also auch messbar ist, ist der erste Punkt automatisch erfüllt.

Zu a):

Wir betrachten die Funktion f definiert durch $f(x) = 2x$. Es gilt für $R > 0$:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x = \left[x^2\right]_{-R}^{R} = R^2 - R^2 = 0 \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

f erfüllt also die Voraussetzungen in Aufgabenteil a). Andererseits ist für alle $R > 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ \mathrm{d}x \geq \int_0^R 2x\ \mathrm{d}x = R^2$$

- also ist $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ \mathrm{d}x$ unbeschränkt und damit existiert das uneigentliche Integral nicht.

Zu b):

Wir verwenden den Satz von der majorisierten Konvergenz und betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f_n(x) := f(x)\cdot\chi_{[-n,n]}(x)$ mit der charakteristischen Funktion χ sei. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ und es ist

$$|f_n(x)| = |f(x)\cdot\chi_{[-n,n]}| \leq |f(x)|, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Weil $|f|$ nach Voraussetzung integrierbar ist, ist $|f|$ eine integrierbare Majorante und es gilt also

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

Das heißt, die Folge konvergiert und der Grenzwert ist kleiner als unendlich.

Zu c):

Für Riemann Integrale ist diese Aussage falsch, wie z.B. die Funktion Funktion $f(x) = x\sin(x^4)$. Auch für Lebesgue-Integrale ist die Aussage falsch, die eben genannte Funktion ist aber kein Gegenbeispiel, weil nicht Lebesgue-integrierbar. Wir definieren zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R} &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x\in[n, n+\frac{1}{n^2}] \text{ für } n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

g ist als Stufenfunktion messbar und wegen

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_n^{n+\frac{1}{n^2}} 1\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2} < \infty$$

integrierbar.
Da g aber nicht wie gefordert stetig ist, definieren wir die Dreiecksfunktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto \begin{cases} 2n^2(x-n) & x\in[n, n+\frac{1}{2n^2}] \text{ für } n\in\mathbb{N} \\ 2n^2(n+\frac{1}{n^2}-x) & x\in[n+\frac{1}{2n^2}, n+\frac{1}{n^2}] \text{ für } n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Wegen $f(n) = 0, f\left(n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 1, f\left(n+\frac{1}{n^2}\right) = 0$ begrenzt der Graph von f im Abschnitt $\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]$ mit der x-Achse ein gleichschenkliges Dreieck mit Höhe 1 (für alle $n\in\mathbb{N}$). Insbesondere ist f stetig und g bildet eine integrierbare Majorante von f, das somit selbst integrierbar ist. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert also, wohingegen $f\left(n+\frac{1}{2n^2}\right) = 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und damit

$$\limsup_{x\to\infty} f(x) = 1 \text{ und außerdem } \liminf_{x\to\infty} f(x) = 0$$

verhindern, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert.