Frühjahr 17 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben ist die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}.$$

Beweisen Sie:

(a) f_n konvergiert auf dem offenen Intervall (0,1) punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

(c) Für jeden Parameter $\alpha \in (0,1)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^\alpha f_n(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Lösungsvorschlag:

(a) Für alle $x \in (0,1)$ ist $x^2 > 0$ und kürzen von $n^2 > 0$ liefert $f_n(x) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2}$, was für $n \to \infty$ gegen $\frac{0}{0+x^2} = 0$ konvergiert. Damit ist die punktweise Konvergenz gezeigt. Wäre die Konvergenz gleichmäßig so würde sich ein Widerspruch zu Aussage (b) ergeben, weil wir dann Limes und Integration vertauschen könnten und $\int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0 \neq \frac{\pi}{2}$ einen Widerspruch liefern würde. Wir können aber auch direkt $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2}$ berechnen, womit wir $\|f_n - 0\|_\infty \geq \frac{n}{2}$ für $n > 1$ erhalten, was die gleichmäßige Konvergenz widerlegt, weil das für $n \to \infty$ gegen ∞ divergiert und nicht gegen 0 konvergiert.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\arctan(nx)' = f_n(x)$, nach dem HDI gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (\arctan(n) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Wir integrieren partiell und erhalten

$$\int_0^1 x^\alpha f_n(x)\ \mathrm{d}x = x^\alpha \arctan(nx)\big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Der Minuend lautet $\arctan(n)$ was wie in (b) gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Für den Subtrahenden werden wir ebenfalls Konvergenz gegen $\frac{\pi}{2}$ zeigen, womit die Aussage bewiesen wäre. Es gilt für $0 \leq c \leq 1$ die Identität

$$\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x = \int_0^c \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x + \int_c^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Sei nun $0 < c < 1$ fixiert, dann gilt für den ersten Summanden unabhängig von n

$$\int_0^c \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x \leq \int_0^c \frac{\pi}{2} \alpha x^{\alpha-1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} c^\alpha,$$

was für $c \to 0$ gegen 0 konvergiert. Außerdem konvergiert $\alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)$ auf $[c,1]$ gleichmäßig gegen $\frac{\pi}{2}\alpha x^{\alpha-1}$, denn

$$|\alpha x^{\alpha-1}(\arctan(nx) - \frac{\pi}{2})| \leq \alpha c^{\alpha-1}(\frac{\pi}{2} - \arctan(nc))$$

gilt für alle $x \in [c,1]$ nach der Monotonie von $x^{\alpha-1}$ und $\arctan(nx)$. Das konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0, also folgt wie behauptet die gleichmäßige Konvergenz. Damit konvergiert $\int_c^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x$ für $n \to \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}\int_c^1 \alpha x^{\alpha-1}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(1-c^\alpha)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Ungleichung $\left|\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right| \\
\leq \int_0^c \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x + &\left|\int_c^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}(1-c^\alpha)\right| + \frac{\pi}{2}c^\alpha \\
\leq &\left|\int_c^1 \alpha x^{\alpha-1} \arctan(nx)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}(1-c^\alpha)\right| + \pi c^\alpha
\end{aligned}$$

Für $c \to 0$ geht der zweite Summand gegen 0. Wir finden also ein $c \in (0,1)$ mit $c^\alpha < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, dann ist der zweite Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Wir hatten auch gesehen, dass der erste Summand für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, wir finden also ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ dieser Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Damit haben wir unsere gewünschte Ungleichung erzielt und die Konvergenz gezeigt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$