

**Frühjahr 17 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Im Folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrable Funktion.

- (a) Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale im Spezialfall, dass sie das Integral von $f \circ T$ zurückführen auf das Integral über f , wobei die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine *lineare* Abbildung ist.
- (b) Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + (x_1 + x_2)^2)(1 + (2x_1 + 5x_2)^2)},$$

über \mathbb{R}^2 .

Lösungsvorschlag:

- (a) Es gilt

$$\int_{T(\mathbb{R}^2)} f(y) d\mathcal{L}^2(y) = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^2} (f \circ T)(x) d\mathcal{L}^2(x),$$

sofern das rechte Integral existiert.

- (b) Die Funktion ist stetig, der Nenner ist stets größer als 1, und daher integrabel. Außerdem ist f von der Form $g \circ T$ mit $g(y_1, y_2) = \frac{1}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}$ und $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 5x_2)^T$. Die darstellende Matrix von T ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mit Determinante $5 - 2 = 3$, was positiv ist. Insbesondere ist T surjektiv und $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Weil der Integrand strikt positiv ist, existiert das rechte Integral in $[0, \infty]$. (Man kann sogar durch geeignete Abschätzung zeigen, dass das Integral endlich ist und eine obere Schranke herleiten). Das gesuchte Integral ist also gleich

$$\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^2} g(y_1, y_2) d\mathcal{L}^2(y) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y_1^2} d\mathcal{L}^1(y_1) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y_2^2} d\mathcal{L}^1(y_2) = \frac{1}{3} \pi^2$$

nach dem Satz von Fubini, wobei im letzten Schritt die Lebesgue-Integrale der positiven stetigen Integranden in Riemann-Integrale umgewandelt worden sind und der HDI verwendet worden ist ($\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}$).

J.F.B.