Frühjahr 17 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x + y^2$. Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ die Menge aller kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = r^2$ und geben Sie jeweils mit Begründung an, ob es sich bei diesen um lokale Maxima oder Minima handelt.

Lösungsvorschlag:

Man könnte die Methode von Lagrange benutzen, einfacher ist es aber die Nebenbedingung nach $y^2 = r^2 - x^2$ aufzulösen und das in f einzusetzen. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = r^2$ gilt nämlich $f(x,y) = x + y^2 = x + r^2 - x^2$. Weiterhin ist $x^2 \le x^2 + y^2 = r^2$ woraus durch Radizieren $|x| \le r$ folgt. Natürlich gibt es für alle x mit $|x| \le r$ auch ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = r^2$, nämlich $(x, \pm\sqrt{r^2 - x^2})$. Wir bestimmen also die Extrema der Funktion $g : [-r,r] \to \mathbb{R},\ g(x) = r^2 + x - x^2$. Diese besitzt als stetige Funktion auf einem kompakten, nicht leeren Intervall natürlich globale Maxima und Minima. Wegen $g'(x) = 1 - 2x$ ist der einzig kritische Punkt im Innern des Intervall $x = \frac{1}{2}$. Wir müssen aber auch die Randwerte betrachten. Es gilt $g(-r) = -r, g(r) = r, g(\frac{1}{2}) = r^2 + \frac{1}{4}$, wobei im letzten Fall noch $r > \frac{1}{4}$ gefordert werden muss. Wir werden nun zwei Fälle unterscheiden:

$0 < r \le \frac{1}{2}$: In diesem Fall ist $-r$ das Minimum und r das Maximum. Aus $x^2 + y^2 = r^2$, folgt dann in beiden Fällen $y = 0$, weshalb in diesem Fall die Funktion f genau bei $(-r,0)$ ein Minimum mit Wert $-r$ und bei $(r,0)$ ein Maximum mit Wert r hat. Man beachte, dass durch $r > \frac{1}{2}$ kein zusätzliches Extremum entsteht.

$r = \frac{1}{2}$: Wir haben die gleichen Kandidaten wie im vorherigen Fall aber zusätzlich den Kandidaten $x = \frac{1}{2}$ mit $g(\frac{1}{2}) = r^2 + \frac{1}{4} > r$, denn das quadratische Polynom $h(r) = r^2 - r + \frac{1}{4}$ hat als Nullstellen genau die Punkte $r = \pm\frac{1}{2}$ und positiven Leitkoeffizienten, ist für $r > \frac{1}{2}$, also strikt positiv. Hier ist also $x = -r$ das globale Minimum für g und wieder $(-r,0)$ das globale Minimum für f, während $x = \frac{1}{2}$ das globale Maximum für g und die Punkte $(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}})$ sind die globalen Maxima von f unter der Nebenbedingung.

Die Aufgabe ist damit zwar gelöst, zur Probe werden wir aber noch die Lagrangemethode probieren. Die Nebenbedingung wird zu $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ aufgelöst und wir erhalten $\nabla g(x,y) = 2(x,y)^{\mathrm{T}} \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = r^2$. Die Methode ist also anwendbar. Die Lagrangefunktion $L(x,y,\lambda) = y + x^2 + \lambda g(x,y)$ hat als Gradienten $\nabla L(x,y,\lambda) = (1 + 2\lambda x, 2y(1+\lambda), x^2 + y^2 - r^2)^{\mathrm{T}}$. Damit dieser verschwindet, muss $x \neq 0 \neq \lambda$ gelten und wir können nach $\lambda = -\frac{1}{2x}$ auflösen. Die zweite Komponente verschwindet genau für $y = 0$ oder $1 + \lambda = 0$, was mit $\lambda = -\frac{1}{2x}$ wiederum äquivalent zu $x = \frac{1}{2}$ ist. Die dritte Gleichung liefert für $y = 0$ die Punkte $x = \pm r$ und ist für $x = \frac{1}{2}$ unlösbar, falls $r < \frac{1}{2}$ gilt, liefert für $r \ge \frac{1}{2}$ aber $y = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$. Wir erhalten also genau die gleichen Kandidaten wie zuvor und eine analoge Diskussion reproduziert unser Ergebnis, wenn man zusätzlich beachtet, dass die Funktion f stetig ist und daher auf der kompakten Menge $\partial B_r(0) \neq \emptyset$ globales Maximum und Minimum besitzt.

$\mathcal{J.F.B.}$