Frühjahr 17 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben ist folgendes System linearer Differentialgleichungen für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ursprung (0,0) ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Geben Sie einen Wert für $x(0) \in \mathbb{R}^2$ an, so dass die euklidische Norm $\|x(t)\|$ der entsprechenden Lösung x *keine* monotone Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie einen Parameter $p > 0$ derart, dass für jede Lösung x die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = x_1(t)^2 + px_2(t)^2$ monoton in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe ist es nicht notwendig die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems zu bestimmen.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix. Das charakteristische Polynom $(\lambda+1)^2+4$ hat in $\mathbb{C}$ genau die Nullstellen $\lambda = \pm 2i - 1$. Damit hat jeder Eigenwert negativen Realteil und der Ursprung ist eine asymptotisch stabile Ruhelage.

(b) Die Abbildung $t \mapsto \|x(t)\|$ ist genau dann monoton, wenn die Abbildung $t \mapsto \|x(t)\|^2$ monoton ist. Dies liegt daran, dass Normen nichtnegativ sind und $t \mapsto t^2$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wächst. Letztere ist stetig differenzierbar und damit genau dann monoton, wenn die Ableitung das Vorzeichen nicht wechselt. Die Ableitung ist durch $t \mapsto 2(x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t)) = 2(-x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + 4x_1(t)x_2(t) - x_2^2(t)) = 6x_1(t)x_2(t) - 2x_1^2(t) - 2x_2^2(t)$ gegeben. Wir wählen nun $x(0) = (1,1)$, dann ist die Ableitung von $t \mapsto \|x(t)\|^2$ an der Stelle $t = 0$ durch $2 > 0$ gegeben und die Abbildung um 0 herum monoton steigend. Sie kann aber nicht global monoton steigen, denn (0,0) ist die einzige Ruhelage des Differentialgleichungssystems, weil die Matrix trivialen Kern hat und sie ist asymptotisch stabil. Das heißt jede Lösung konvergiert gegen die Nulllösung (lineares System!) für $t \to \infty$ und damit konvergiert auch $t \mapsto \|x(t)\|^2$ gegen 0 für $t \to \infty$. Würde diese Abbildung monoton sein, so wäre der Grenzwert größer als $\|x(0)\|^2 = 2$, ein Widerspruch.

(c) Wir gehen analog vor und bestimmen die Ableitung dieser Funktion. Sie ist durch $t \mapsto -2x_1^2(t) + (8p-2)x_1(t)x_2(t) - 2px_2(t)^2$ gegeben. Wir werden $p > 0$ wählen, sodass diese Abbildung stets nichtpositiv ist, dann folgt die gewünschte Monotonie. Wir wählen $p = \frac{1}{2}$ und erhalten somit, dass die Ableitung durch $-2(x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2) = -2((x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t))^2 + \frac{3}{4}x_2^2(t)) \leq 0$ gegeben ist. Damit ist für jede Lösung die betrachtete Abbildung monoton fallend. Dies war zu zeigen.
Mit quadratischer Ergänzung sieht man, dass die Ableitung genau dann das Vorzeichen nicht wechselt, wenn $\frac{3-\sqrt{5}}{8} \leq p \leq \frac{3+\sqrt{5}}{8}$ ist. Für p=1 erhalten wir auch wieder das Resultat aus (b), weil 1 nur die erste, aber nicht die zweite Ungleichung erfüllt.

J.F.B.