Frühjahr 17 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und sowie $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral:

$$\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} \mathrm{d}z = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}.$$

Lösungsvorschlag:

Variante 1: Da p ein Polynom ist, gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, sowie komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit der Parametrisierung $\gamma_{r,w} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{r,w}(t) = w + re^{it}$ und der Definition von Wegintegralen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{r,w}} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\ \overline{z}^k \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \int_{\gamma_{r,w}} \overline{z}^k \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \int_0^{2\pi} (\overline{w} + re^{-it})^k ire^{it} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} ir \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \overline{w}^j r^{(k-j)} e^{i(1+j-k)t} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} ir \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \overline{w}^j r^{(k-j)} \int_0^{2\pi} e^{i(1+j-k)t} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} ir^2 \binom{k}{k-1} \overline{w}^{k-1} 2\pi \\
&= 2\pi i r^2 \sum_{k=1}^{n} k \overline{a_k}\ \overline{w}^{k-1}
\end{aligned}$$

Wegen $p'(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$ und $\overline{p'(w)} = \sum\limits_{k=1}^{n} k \overline{a_k}\ \overline{z}^{k-1}$, ist damit die Aussage gezeigt. Wir gehen noch etwas genauer auf die verschiedenen Rechenschritte ein. In der ersten Zeile wurden die Linearität des Integrals, sowie die Eigenschaften der komplexen Konjugation benutzt. In der letzten Gleichung der ersten Zeile wurde die Definition des Wegintegrals benutzt und die Ableitung der Parametrisierung $\gamma'_{r,w}(t) = ire^{it}$ eingesetzt. Außerdem haben wir verwendet, dass das komplex Konjugierte von e^{it} durch e^{-it} gegeben ist, während jenes der reellen Zahl r wieder r ist. In der zweiten Zeile wurde der Binomische Lehrsatz benutzt und die Potenzgesetze der Exponentialfunktion verwendet. In der dritten Gleichung wurde erneut die Linearität des Integrals benutzt. In der Gleichheit der dritten Zeile wurde die wohlbekannte Identität $\int_0^{2\pi} e^{ikt} \mathrm{d}t = 2\pi\delta_{0,k}$ für ganze Zahlen k benutzt, die man mit der Eulerschen Identität sofort nachprüfen kann. Für $k = 0$ ist die Summe von $j = 0$ bis k, daher 0, weil jeder Summand 0 ist, während für $k > 0$ genau der Summand mit $j = k - 1$ übrig bleibt. Dies wurde eingesetzt. In der letzten Zeile wurde nur noch die Linearität der Summe verwendet.

Variante 2: Wesentlich eleganter ist es das Polynom p um w zu entwickeln, d. h. die Potenzreihenentwicklung $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(z-w)^k$ zu betrachten. Dies ist möglich, weil Polynome ganze Funktionen sind, also um alle $w \in \mathbb{C}$ als Potenzreihe darstellbar sind, die aus Gradgründen irgendwann abbrechen muss. Analog zu Variante 1 erhält man dann

$$\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \overline{b_k} r^k e^{-ikt} i r e^{it} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \overline{b_k} r^{k+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(1-k)t} \mathrm{d}t = \overline{b_1} r^2 i 2\pi,$$

was wegen $p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k b_k (z-w)^{k-1}$ auf $\overline{p'(w)} = \overline{b_1}$ führt und die gewünschte Formel zeigt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$