F17T2A4

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

a) Bestimme alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 1 \text{ und } \forall z \in D: \; f'(z) = (f(z))^2$$

b) Bestimme alle holomorphen Funktionen $g = u + iv : \; D \to \mathbb{C}$, u und v reellwertig, mit

$$u(0) = v(0) = 0 \text{ und } \forall z \in D: \; \sin(u(z)) + iv(z)\cos(v(z)) = 0$$

zu a):

Laut Angabe gilt:

$$f'(z) = (f(z))^2$$

$$f''(z) = 2 \cdot f(z) \cdot f'(z) = 2 \cdot f(z) \cdot (f(z))^2 = 2 \cdot (f(z))^3$$

$$f'''(z) = 2 \cdot 3 \cdot (f(z))^2 \cdot f'(z) = 2 \cdot 3 \cdot f(z) \cdot (f(z))^2 \cdot (f(z))^2 = 3! \cdot (f(z))^4$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = n! \cdot (f(z))^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot (f(0))^{(n+1)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f(0))^{(n+1)} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1^{(n+1)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Dies sind die gesuchten holomorphen Funktionen.

Alternative:

$f\big|_{D\cap\mathbb{R}}$ löst das Anfangswertproblem: $x' = x^2$, $x(0) = 1$

Da $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \in C^1(\mathbb{R})$ hat $x' = x^2$, $x(0) = 1$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda :]a, b[\to \mathbb{R}$

Trennen der Variablen:

$$\int_1^{\lambda(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t ds = t = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\lambda(t)} = 1 - \frac{1}{\lambda(t)}$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{1-t}, \quad \lambda :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{1-t}$$

$$\lambda(0) = 1, \quad \lambda'(t) = \frac{-(-1)}{(1-t^2} = (\lambda(t))^2 \text{ für } t \in]-\infty, 1[$$

$\lambda :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ist maximale Lösung von $x' = x2$, $x(0) = 1$.

Für jedes holomorphe $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = (f(z))^2$ für $z \in D$, $f(0) = 1$ gilt:

$$f\Big|_{]-1,1[} = \lambda\Big|_{]-1,1[} \quad (\text{ denn } f\Big|_{D\cap\mathbb{R}} \text{ löst } x' = x^2,\ x(0) = 1)$$

$g : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ holomorph.

$f(z) = g(z)$ für alle $z \in D \cap \mathbb{R} =]-1, 1[$. Da $]-1, 1[\subseteq D$ Häufungspunkte hat, die in D liegen, gilt $f = g$ laut Identitätssatz.

zu b):

$$\sin(u(z)) + i \cdot v(z) \cdot \cos(v(z)) = 0 \quad \overset{u,v \text{ reellwertig}}{\Longleftrightarrow} \quad \sin(u(z)) = 0, \quad v(z) \cdot \cos(v(z)) = 0$$

Nebenrechnung:

$$\sin(u(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(z) \in \pi\mathbb{Z}$$

$$v(z) \cdot \cos(v(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(z) = 0 \text{ oder } v(z) \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$\pi\mathbb{Z}$ und $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ sind diskret, D ist zusammenhängend und u, v stetig (da g holomorph ist, also insbesondere stetig, ist somit auch die Real- und Imaginärteilbildung stetig). Daher sind u, v konstant.
Mit $u(0) = v(0) = 0$ ergibt sich dann $u \equiv v \equiv 0$, also $g \equiv 0$.