F17T2A2

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

die Erhaltungsgrößen

$$V,\ W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad V(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad W(x) := x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$$

besitzt. Zeige:

a) Alle maximalen Lösungen von (1) existieren auf ganz $\mathbb{R}$.

b) $\overline{x} := 0$ ist eine stabile, stationäre Lösung von (1).

c) Für jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von (1) ist $t \mapsto x_3(t)$ konstant.

d) Es gibt ein Vektorfeld f mit den obigen Eigenschaften, für welches zusätzlich die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = (1, 0, 0)$ periodisch und nicht konstant ist.

zu a):

f ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld, also insbesondere lokal Lipschitz-stetig. Daher ist der Satz vom Randverhalten maximaler Lösungen anwendbar.

Sei $\lambda :]a.b[\to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{pmatrix}$ eine maximale Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Da V eine Erhaltungsgröße ist, gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$||\lambda(t)||_2^2 = (\lambda_1(t))^2 + (\lambda_2(t))^2 + (\lambda_3(t))^2 = V(\lambda(t)) = C \quad \forall t \in]a, b[$$

$\Rightarrow \ ||\lambda(t)||_2 = \sqrt{C} \ \Rightarrow \ \lambda$ ist beschränkt.

Da f auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert ist, hat der Definitionsbereich $D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung einen leeren Rand.

Nach dem Satz vom Randverhalten tritt für $t \to a$ einer der folgenden Fälle ein:

1. $b = \infty$
2. $\lim\limits_{t \nearrow b} ||\lambda(t)|| = \infty$
3. $\partial D \neq \emptyset$ und $\lim\limits_{t \nearrow b} \operatorname{dist}((t, \lambda(t)), \partial D) = 0$

Da $\partial D = \emptyset$ ist, tritt der 3. Fall nicht ein.
Da $\lambda(t)$ beschränkt ist, tritt der 2. Fall nicht ein.
Daher gilt der 1. Fall und es ist $b = \infty$.

Analog ist auch $a = -\infty$

Daher ist $]t_-, t_+[=]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$. Die maximale Lösung $\lambda(t)$ ist demnach auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

zu b):

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da f stetig differenzierbar ist, also insbesondere lokal Lipschitz-stetig ist, gibt es nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige maximale Lösung x.

Da V eine Erhaltungsgröße ist, somit konstant entlang von Lösungen ist, gilt dann

$$||x(t)||_2^2 = (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + (x_3(t))^2 = V(x(t)) = V(x(0)) =$$
$$= V\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big) = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $x(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Also ist $\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine konstante Lösung von (1), somit eine stationäre Lösung.

Als Erhaltungsgröße ist V insbesondere eine Lyapunov-Funktion. V hat als Normquadrat ein Minimum bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, was die Stabilität von $\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach dem Lyapunov-Kriterium zeigt.

zu c):

Sei

$$x : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

eine beliebige Lösung von $\dot{x} = f(x)$.

Da V und W Erhaltungsgrößen sind, gibt es Konstante c_1 und $c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + (x_3(t))^2 = V(x(t)) = c_1$$
$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + 2x_3(t) = W(x(t)) = c_2$$

für alle $t \in I$. Die Subtraktion der Gleichungen liefert

$$(x_3(t))^2 - 2x_3(t) = c_1 - c_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Betrachte die Menge

$$Z := \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 2y = c_1 - c_2\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 2y - c_1 + c_2 = 0\}$$

Für alle $t \in I$ ist nun $x_3(t) \in Z$.

Als Nullstellenmenge eine Polynoms, welches kein Nullpolynom ist, ist $Z \subseteq \mathbb{R}$ ein diskreter Teilraum. Z hat höchstens 2 Elemente.

Da x als Lösung der Differentialgleichung differenzierbar ist, also insbesondere stetig ist, kann man die Stetigkeit der Komponente x_3 folgern.
Als Intervall ist $I \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend.
Somit ist $x_3 : I \to \mathbb{R}$, als stetige Abbildung von einem zusammenhängenden Raum in einem diskreten Raum, konstant.

zu d):

Wähle

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f ist als Verkettung stetiger differenzierbarer Abbildungen stetig differenzierbar.
Für jede Lösung x der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ gilt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = 2 \cdot x_1 \cdot \dot{x_1} + 2 \cdot x_2 \cdot \dot{x_2} + 2 \cdot x_3 \cdot \dot{x_3} = 2 \cdot x_1 \cdot (-x_2) + 2 \cdot x_2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = 2 \cdot x_1 \cdot \dot{x_1} + 2 \cdot x_2 \cdot \dot{x_2} + 2 \cdot x_3 = 2 \cdot x_1 \cdot (-x_2) + 2 \cdot x_2 \cdot x_1 + 2 \cdot 0 = 0$$

Daher sind V und W Erhaltungsgrößen. Betrachte nun konkret die Funktion

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$x(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2(t) \\ x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} = f(x(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Daher ist x die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zudem gilt

$$x(t+2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(t+2\pi) \\ \sin(t+2\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = x(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

weshalb x periodisch mit Periode 2π ist.

Außerdem ist

$$x(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) \\ \sin(\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = x(\pi)$$

weshalb x nicht konstant ist.