Frühjahr 17 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{6t}{1+3t^2}y + 5.$$

Bestimmen Sie die maximale Lösung φ der Differentialgleichung zum Anfangswert $\varphi(0) = 2$. Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

(b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{5}y^3 + t\arctan t - \frac{\pi t}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für jede Lösung der Differentialgleichung mit $\lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$ auch der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)$ existiert, und bestimmen Sie diesen. Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten zunächst die homogene Differentialgleichung. Offensichtlich ist $y(t) = 1+3t^2$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir bestimmen jetzt φ mittels Variation der Konstanten. Wir machen also den Ansatz $\varphi(t) = c(t)(1+3t^2)$ und bestimmen $\varphi'(t) = c'(t)(1+3t^2) + c(t)\cdot 6t \overset{!}{=} \frac{6t}{1+3t^2}c(t)(1+3t^2) + 5 = 6tc(t) + 5$. Nach Substraktion von $6tc(t)$ und Division von $1+3t^2$ folgt $c'(t) = \frac{5}{1+3t^2}$. Integration liefert $c(t) = \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}t) + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung $2 = \varphi(0) = c(0)\cdot 1$ folgt $c = 2$. Damit ist die Maximallösung durch $\varphi(t) = (1+3t^2)(\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}t) + 2)$ gegeben. Definiert ist diese auf $\mathbb{R}$.

(b) Wir untersuchen zunächst das Grenzverhalten der Funktion $t \mapsto t(\arctan t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\arctan t - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{t}}$. Zähler und Nenner konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0 und sind differenzierbar, zudem besitzt die Nennerableitung keine Nullstellen (wir können uns für die Limesbetrachtung auf die positive reelle Halbachse einschränken). Wir können also den Satz von l'Hospital benutzen und den Limes $\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t^2+1}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} -\frac{t^2}{1+t^2} = -1$ betrachten. Weil dieser existiert, konvergiert auch unsere ursprüngliche Funktion für $t \to \infty$ gegen -1. Wir formen um und erhalten $y^3 = 5y' - 5t\arctan t + \frac{5}{2}\pi t$. Weil die Funktion $t \mapsto t^3$ auf $\mathbb{R}$ bijektiv ist (also $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet), können wir außerdem die Umkehrfunktion auf beiden Seiten bilden. Als Umkehrfunktion einer stetigen Funktion auf einem Intervall ist diese wieder stetig. Wir erhalten also $y(t) = \sqrt[3]{5y' - 5t\arctan t + \frac{5}{2}\pi t}$, was für $t \to \infty$ gegen $\sqrt[3]{5}$ konvergiert.

J.F.B.