Frühjahr 17 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) := \int_0^{\sin(x)} e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto g(z) := \int_0^{\sin(x)} \sqrt{t^4 + 3z^2} \mathrm{d}t$$

am Punkt $z = \pi$.

In beiden Aufgabenteilen muss klar ersichtlich sein, wie Sie zu Ihrem Ergebnis kommen.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir benutzen den HDI und die Kettenregel. Für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$ können wir die Ableitung nach dem HDI berechnen, weil der Integrand stetig ist und erhalten $h'(x) = e^{x^2}$. Weil wir $f(x) = h(\sin(x))$ schreiben können, erhalten wir mit der Kettenregel $f'(x) = h'(\sin(x)) \cdot \cos(x) = e^{x^2} \cdot \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir erwähnen kurz, dass der Radikand nichtnegativ ist, als Summe von Quadraten und daher der Integrand eine wohldefinierte, stetige Funktion darstellt. Wir werden die Ableitung mit der Definition bestimmen. Zunächst gilt $g(\pi) = 0$, weil die Sinusfunktion bei π eine Nullstelle hat und daher die Integralgrenzen identisch sind. Für $h \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Symmetrieeigenschaften des Sinus bzw. der Additionstheoreme, die Identität $\sin(\pi + h) = \sin(\pi)\cos(h) - \cos(\pi)\sin(h) = -\sin(h)$. Daher ist $\dfrac{g(\pi + h) - g(\pi)}{h} = \dfrac{1}{h}\int_0^{-\sin(h)} \sqrt{t^4 + 3(\pi + h)^2}\mathrm{d}t = \dfrac{-\sin(h)}{h} \cdot \sqrt{\xi_h^4 + 3(\pi + h)^2}$ für ein ξ_h zwischen 0 und $-\sin(h)$. Die letzte Gleichung gilt nach dem Mittelwertsatz für Integrale, den wir anwenden können, weil der Integrand stetig ist. Wir lassen jetzt h gegen 0 streben und erhalten dadurch die Ableitung von g bei π. Der erste Faktor konvergiert gegen die Ableitung der Funktion $-\sin$ an der Stelle 0, also gegen $-\cos(0) = -1$. Die Wurzelfunktion ist stetig, wir können also den Grenzwert unter der Wurzel bilden. Weil $-\sin(h)$ für $h \to 0$ gegen $-\sin(0) = 0$ strebt, weil auch $-\sin$ stetig ist, folgt nach dem Schachtelungssatz/Sandwichlemma, dass auch ξ_h gegen 0 konvergiert. Zuletzt konvergiert $3(\pi + h)^2$ nach den Limessätzen gegen $3\pi^2$. Damit ist $g'(\pi) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(\pi + h) - g(\pi)}{h} = -\sqrt{3}\pi$.

$\mathcal{J.F.B.}$