Frühjahr 17 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> (a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(1) = \pi$ und $f' = |z| \cdot f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.
>
> (b) Zeigen Sie, dass es höchstens eine ganze Funktion f mit $f(0) = 3 + 2i$ gibt, so dass
> $$f'(z) = \sin(z) \cdot f(z) + e^{z^2} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Nein, eine solche Funktion existiert nicht. Angenommen Sie gäbe es doch, dann wäre die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z) \cdot \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ ebenso holomorph. Für $z \in \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{C}$ würde dann

$$g'(z) = f'(z) \cdot \exp(-\frac{1}{2}z^2) - z \cdot f(z) \cdot \exp(-\frac{1}{2}z^2) = 0$$

folgen, weil für nichtnegative reelle Zahlen $z = |z|$ gilt. Als Ableitung einer holomorphen Funktion ist g' ebenso holomorph auf $\mathbb{C}$ und stimmt auf der Menge $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit 0 überein. Weil diese Menge Häufungspunkte in $\mathbb{C}$ besitzt (z. B. 0) ist g' schon konstant 0 und daher g konstant. Es gibt also ein $c \in \mathbb{C}$ mit $g \equiv c$, woraus nach Multiplikation mit $\exp(\frac{1}{2}z^2) \neq 0$ schon $f(z) = c \cdot \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt. Mit der Bedingung $f(1) = \pi$ folgt $c = \pi\sqrt{e}$. Das heißt der einzig mögliche Kandidat für eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften ist $f(z) = \pi\sqrt{e} \cdot \exp(-\frac{1}{2}z^2)$, diese Funktion erfüllt aber $f'(z) = z \cdot f(z)$, was für $z = -1$ nicht mit $|z| \cdot f(z)$ übereinstimmt. Demnach gibt es keine solche Funktion.

(b) Seien f, g zwei ganze Funktionen mit den geforderten Eigenschaften, wir betrachten die ebenso ganze Funktion $h := f - g$. Es gilt

$$h'(z) = f'(z) - g'(z) = \sin(z) \cdot f(z) + e^{z^2} - \sin(z) \cdot g(z) - e^{z^2} = \sin(z) \cdot h(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Betrachtet man jetzt die holomorphe Funktion $j(z) := h(z) \cdot e^{\cos(z)}$, so folgt $j'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist j konstant $c \in \mathbb{C}$ und nach Multiplikation mit $e^{-\cos(z)} \neq 0$ folgt auch $h(z) = c \cdot e^{-\cos(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wegen $h(0) = f(0) - g(0) = 0$ und $e^{-1} \neq 0$, folgt dann bereits $c = 0$ und schließlich $h \equiv 0$, also gilt $f(z) - g(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, was zu $f = g$ äquivalent ist. Daher ist eine solche Funktion eindeutig bestimmt, sofern sie existiert.

$\mathcal{J.F.B.}$