Frühjahr 17 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Es sei
$$X := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$
der Abschluss der oberen Halbebene. Zeigen Sie, dass durch
$$f(z) = \frac{1}{z^2 + iz - 2}$$
eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ohne Polstellen definiert ist.

(b) Beweisen Sie, dass $|f|$ auf X ein globales Maximum besitzt.

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum von $|f|$ auf X und bestimmen Sie alle Punkte, an denen das globale Maximum angenommen wird. Begründen Sie, warum Ihre Antwort in der Tat das globale Maximum von $|f|$ auf X ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners mit der Lösungsformel/Mitternachtsformel. Diese sind $z_\pm = \dfrac{-i \pm \sqrt{7}}{2}$. Beide haben Imaginärteil $-\frac{1}{2} < 0$, also gilt $z_\pm \notin X$.

(b) Die Funktion $|f| : X \to (0, \infty)$, nimmt nur positive Werte an. Die Funktion $g : (0, \infty) \to (0, \infty), t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ist streng monoton fallend und surjektiv, erfüllt also $x < y \iff g(x) > g(y)$ für $x, y > 0$. Daher hat $|f|$ genau dann ein globales Maximum, wenn $g \circ f : X \to (0, \infty)$ ein globales Minimum besitzt. Außerdem nimmt f genau dann ein Maximum in $x_0 \in X$ an, wenn $g \circ f$ ein Minimum in x_0 annimmt. Wir können stattdessen also die Funktion $h : X \to (0, \infty), h(z) = |z^2 + iz - 2|^2$ minimieren. Diese ist stetig, erfüllt $h(0) = 4$ und $h(z) \geq (|z|^2 - |z| - 2)^2$, was für $|z| \to \infty$ ebenfalls gegen ∞ divergiert (quadratisches Polynom mit positivem Leitkoeffizienten). Wir finden also ein $R > 0$ mit $|z| > R \implies h(z) > 4$. Auf $X \cap \overline{B_R(0)}$ besitzt h ein globales Minimum x_0 und ist nach oben durch 4 beschränkt. Dies liegt an der Konstruktion von R, der Stetigkeit von h und der Kompaktheit der Menge (beschränkt durch R, abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen). Wegen der Konstruktion gilt $h(x_0) \leq h(x)$ für alle $x \in X \cap \overline{B_R(0)}$ und außerdem $h(x_0) \leq 4 < h(x)$ für alle $x \in X \backslash \overline{B_R(0)}$. Also ist x_0 eine globale Minimalstelle von h auf X und damit globale Maximalstelle von $|f|$ auf X.

(c) Wir minimieren h. Zunächst betrachten wir $\partial X = \mathbb{R}$. Für $z \in \mathbb{R}$ gilt $h(z) = (z^2 - 2)^2 + z^2 = z^4 - 3z^2 + 4$. Die Ableitung $4z^3 - 6z$ verschwindet genau für $z = 0$ und $z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Analog zu (b) kann man argumentieren, dass h auf $\mathbb{R}$ ein Minimum annimmt und zwar in dem stationären Punkt mit dem kleinsten Funktionswert. Einsetzen zeigt $h(0) = 4 > h(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{5}{2}$, weswegen am Rand das Minimum $\frac{5}{2}$ beträgt.
Wir suchen nun Extrema im Innern. Dafür identifizieren wir $\mathbb{C}$ mittels $x+iy = (x, y)$ mit dem $\mathbb{R}^2$ und erhalten $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto |x^2 - (y^2 + y + 2) + ix(2y + 1)|^2 =$

$(x^2 - c(y))^2 + x^2 d(y)^2$, wobei wir für $y > 0$ jeweils $c(y) \coloneqq y^2 + y + 2$ und $d(y) \coloneqq 2y + 1$ definieren. Man beachte die Identität $c'(y) = d(y)$. Wir berechnen nun den Gradienten von f, es ist

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (2(x^2 - c(y)) \cdot 2x + 2xd(y)^2, 2(x^2 - c(y)) \cdot (-d(y)) + 2x^2 d(y) \cdot 2)^{\mathrm{T}} \\ &= (2x(2x^2 - 2c(y) + d(y)^2), 2(x^2 + c(y))d(y))^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Wir zeigen, dass der Gradient nie verschwindet, indem wir zeigen, dass die zweite Komponente stets strikt positiv ist. Für $y > 0$ ist $d(y) = 2y + 1 > 1 > 0$ und $c(y) = y^2 + y + 2 > 2$, also ist $2(x^2 + c(y))d(y) > 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$. Damit gibt es keine stationären Punkte und keine lokalen Extrema im Inneren, also auch keine globalen.
In (b) wurde gezeigt, dass h auf X ein globales Minimum annehmen muss. Weil es keine stationären Punkte gibt, muss dieses am Rand von X angenommen werden, d. h. in $\mathbb{R}$ liegen. Weil das globale Minimum insbesondere kleiner oder gleich jedem Funktionswert einer reellen Zahl sein muss, muss das Minimum auch ein globales Minimum der Funktion $h|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto (z^2 - 2)^2 + z^2$ sein. Dieses haben wir zuvor mit $\frac{5}{2}$ bestimmt. Also ist das globale Minimum von h der Wert $\frac{5}{2}$, welcher genau in den Punkten $\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \in X$ angenommen wird. Diese beiden Punkte sind damit auch die Maximalstellen von $|f|$. Wegen $h(z) = \dfrac{1}{|f|^2}$, ist das globale Maximum von $|f|$ auf X durch $\sqrt{\dfrac{1}{\frac{5}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ gegeben.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$