Frühjahr 16 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix e^{At} zu $\dot{x} = Ax$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil ist.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen. Dieses ist $-\lambda(\lambda+1)^2 - 1 - \lambda + \lambda + 1 = -\lambda(\lambda+1)^2$ mit Nullstellen 0 und -1. Man sieht sofort, dass die Eigenräume eindimensional sind und die Jordannormalform einen Jordanblock der Länge 2 zum Eigenwert -1 enthält, wir bestimmen also Jordanketten.
Wir erhalten $\ker(A) = \mathbb{R}(1{,}1{,}0)^{\mathrm{T}}, \ker(A + \mathbb{1}) = \mathbb{R}(1{,}1{,}1)^{\mathrm{T}}$ und $\ker((A + \mathbb{1})^2) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(2{,}1{,}0)^{\mathrm{T}}, (0{,}1{,}2)^{\mathrm{T}}\}$ und wählen als Vektoren $(1{,}1{,}0)^{\mathrm{T}}, (2{,}1{,}0)^{\mathrm{T}}$ und $(A+\mathbb{1})(2{,}1{,}0)^{\mathrm{T}} = (1{,}1{,}1)^{\mathrm{T}}$. Nach Aufstellen und Invertieren der Transformationsmatrix erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich dann die Fundamentalmatrix $e^{tA} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+2)e^{-t} - 1 & 2 - (t+2)e^{-t} & -1 + e^{-t} \\ (t+1)e^{-t} - 1 & 2 - (t+1)e^{-t} & -1 + e^{-t} \\ te^{-t} & -te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

b) Die Lösung ist $t \mapsto e^{(t-1)A}x(1) = \begin{pmatrix} (t+1)e^{1-t} - 1 \\ te^{1-t} - 1 \\ (t-1)e^{1-t} \end{pmatrix}$.

c) Das Stabilitätsverhalten aller Ruhelagen einer linearen GDG der Form $\dot{x} = Ax$ lässt sich aus dem Spektrum von A ablesen. Jeder Eigenwert (-1 und 0) hat nichtpositiven Realteil, und bei den Eigenwerten mit verschwindendem Realteil (0), stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein (beide 1). Die Ruhelage ist also stabil. (Dass es sich wirklich um eine Ruhelage handelt ist klar. Weil es Eigenwerte mit verschwindendem Realteil gibt, ist die Ruhelage aber nicht asymptotisch stabil.)

$\mathcal{J.F.B.}$