Frühjahr 16 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (x^2 - 1)\sin(t), \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, beschränkte Lösung.

b) Zu jedem $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$ existieren die maximalen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= 2x + 4x^3 \end{aligned}$$

zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \xi$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion der Gleichung ist stetig differenzierbar als Verknüpfung glatter Funktionen und daher lokal lipschitzstetig (bzgl. x). Sie ist weiterhin global definiert und besitzt die konstanten Lösungen $x(t) = \pm 1$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf darf die Lösungskurve des Anfangswertproblems diese beiden Lösungskurven nicht schneiden. Der Anfangswert liegt zwischen diesen beiden Kurven, demnach gilt $|x(t)| < 1$ für die maximal fortgesetzte Lösung auf dem maximalen Existenzintervall, die Lösung ist also beschränkt. Wir haben bereits festgestellt, dass es keine Stelle mit $|x(t)| = 1$ gibt, gäbe es eine für die $|x(t)| > 1$ gelten würde, so würden wir nach dem Zwischenwertsatz auch ein Urbild von 1 finden, falls $x(t) > 0$ wäre oder eines von -1, falls $x(t) < 0$ wäre. Das kann nicht sein und die behauptete Ungleichung gilt. Nach der Charakterisierung vom Randverhalten maximaler Lösungen, muss die Lösung global existieren, weil der Definitionsbereich von $f(x,t)$ leeren Rand hat und die Lösung nicht 'explodiert', sondern beschränkt bleibt.

b) Die Strukturfunktion ist ein Polynom und demnach lokal lipschitzstetig. Zu jeder Anfangsbedingung existiert also eine eindeutige Maximallösung des Systems. Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems, dann gilt für die differenzierbare Funktion $g(t) = x(t)^4 + x(t)^2 + y(t)^2$, die auf dem maximalen (daher offenen) Lösungsintervall definiert sein soll, dass die Ableitung $g'(t) =$

$$4x(t)^3\dot{x}(t) + 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) = -8x(t)^3y(t) - 4x(t)y(t) + 4x(t)y(t) + 8x(t)^3y(t)$$

$= 0$ überall verschwindet und g demnach konstant ist, mit $g(t) \equiv g(\tau) =$
$\xi_1^4 + \xi_1^2 + \xi_2^2 := z$.
Damit folgt $|x(t)| = \sqrt{x(t)^2} \leq \sqrt{g(t)} \leq \sqrt{z}$ und $|y(t)| = \sqrt{y(t)^2} \leq \sqrt{g(t)} \leq \sqrt{z}$.
Die Lösung bleibt also beschränkt und weil die Strukturfunktion global definiert ist erhalten wir auf die gleiche Weise wie in a), dass die Lösung global existiert.

$\mathcal{J.F.B.}$