Frühjahr 16 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Zeigen Sie:

a) Ist $S := \{z \in \mathbb{C} \;:\; |\mathrm{Im}\ (z)| < 1\}$, so gibt es keine biholomorphe Abbildung $f : S \to \mathbb{C}$.

b) Es gibt keine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 2i$ und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

c) Ist $U := \{z \in \mathbb{C} \;\; 1 < |z| < 3\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(-2) = 1$ und $f(2) = -1$, dann gibt es $z, w \in U$ mit $f(z), f(w) \in \mathbb{R}$ und $f(z) < -1, f(w) > 1$.

d) Es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $e^{\frac{1}{z_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} i$.

Lösungsvorschlag:

a) Angenommen es gäbe eine solche Abbildung, dann wäre auch die Umkehrabbildung biholomorph. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = \exp(-if^{-1}(z))$, dann gilt

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(-if^{-1}(z))} = e^{\mathrm{Im}(f^{-1}(z))} < e \text{ für alle } z \in \mathbb{C},$$

d. h. g ist beschränkt und holomorph auf $\mathbb{C}$ also konstant nach dem Satz von Liouville. Für die Ableitung folgt $0 = g'(z) = g(z) \cdot -i(f^{-1})'(z)$, also $(f^{-1})'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, weil die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt. Damit ist aber f^{-1} konstant (holomorphe Funktion mit verschwindender Ableitung auf einem Gebiet), kann also nicht bijektiv sein (die Mengen haben unendlich viele Elemente); ein Widerspruch. Die Annahme war daher falsch und die Behauptung ist bewiesen.

b) Nach dem Maximumsprinzip muss jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ein Maximum besitzen, welches am Rand angenommen wird. In diesem Fall würde also $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \leq 1$ folgen und wegen $|2i| = 2 > 1$ kann $f(0) = 2i$ nicht gelten.

c) Die Funktion ist holomorph und nicht konstant, also eine offene Abbildung. Die Menge $V := f(U) = \{f(z) \in \mathbb{C} : z \in U\} \subset \mathbb{C}$ ist offen und enthält die Punkte $f(\pm 2) = \pm 1$, welche daher innere Punkte sind. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(2)), B_\varepsilon(f(-2)) \subset V$, also $f(2) - \frac{\varepsilon}{2}, f(-2) + \frac{\varepsilon}{2} \in f(U)$. Per Definition gibt es nun $z, w \in U$ mit den gesuchten Eigenschaften.

d) Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ besitzt bei $z = 0$ eine wesentliche Singularität. Die Singularität ist nicht hebbar, weil $f(\frac{1}{n}) \to \infty$ konvergiert und kein Pol, weil $f(-\frac{1}{n}) \to 0$ konvergiert. Die gewünschte Aussage folgt nun direkt aus dem Satz von Casorati.

$\mathcal{J.F.B.}$