Frühjahr 16 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Zeigen Sie, dass $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{1+x^3}$ stetig und integrierbar ist.

b) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \dfrac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.
Hinweis: Sie können einen geschlossenen Weg verwenden, der durch 0, R und $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht, oder die Partialbruch-Zerlegung benutzen.

Lösungsvorschlag:

a) Die Stetigkeit ist sofort klar, weil f eine Verknüpfung stetiger Funktionen ist. Der Nenner ist stets mindestens so groß wie 1, wird also nie 0. Auf dem kompakten Intervall [0,1] ist f daher Riemann-integrierbar. Wir zeigen, dass das Integral auf $[1,\infty)$ existiert, also, dass f dort uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Wir kürzen x und erhalten $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$. Damit ist $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{T\to\infty} 1 - \frac{1}{T} = 1 < \infty$. Die Funktion besitzt also eine integrierbare Majorante und ist selbst integrierbar.

b) Wir geben hier die Lösung für beide Möglichkeiten an, wir benutzen zuerst komplexe Integration und danach Partialbruchzerlegung.

K. I. Wir betrachten für $R > 1$ $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit $\gamma_1 : [0,R] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [0,2\pi] \ni t \mapsto Re^{\frac{ti}{3}} \in \mathbb{C}$ und $\gamma_3 : [0,R] \ni t \mapsto (R-t)e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Für $R > 1$ berührt der Weg keine Singularitäten der meromorphen Fortsetzung $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z}{1+z^3}$, mit der Nennernullstellenmenge $S = \{-1, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}\}$, die nur Elemente mit Betrag 1 enthält.
Die Wege γ_R sind geschlossen, stückweise stetig differenzierbar, berühren keine Polstellen von f und umkreisen lediglich die Singularität bei $e^{\frac{\pi i}{3}}$ und diese einmal in positivem Umlaufsinn. Die Funktion f ist bis auf die endliche Menge S holomorph auf der offenen, konvexen Menge $\mathbb{C}$. Wir können das Integral also mit dem Residuensatz berechnen. Dafür berechnen wir das Residuum von f bei $e^{\pi i}$. Weil der Nenner verschwindet, der Zähler aber nicht, handelt es sich um einen Pol erster Ordnung (einfache Nullstelle) und das Residuum ist $\dfrac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{1}{3}e^{\frac{5\pi i}{3}}$. Nach dem Residuensatz ist für jedes $R > 1$ der Wert des Integrals von f über γ_R durch $\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{5\pi i}{3}}$ gegeben.
Einsetzen der Definition liefert $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, was für $R \to \infty$ gegen den gesuchten Integralwert konvergiert, weil das Integral von f über die positive Halbachse existiert.
Das Integral über γ_2 schätzen wir ab, die Länge dieser Kurve ist durch $\frac{2\pi}{3}R$ gegeben. Alle Punkte in der Spur des Weges haben Betrag R und wir können mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für diese Punkte abschätzen: $|f(z)| \leq \frac{R}{R^3-1}$. Nach der Standardungleichung folgt $0 \leq |\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z| \leq \frac{2\pi R^2}{3R^3-3}$, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Wir setzen wieder die Definition an und erhalten $\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R -\frac{(R-t)}{1+(R-t)^3} e^{\frac{4\pi i}{3}}\ \mathrm{d}t$. Substitution $x = R - t$ und Tausch der Integrationsgrenzen führt auf das Integral $-e^{\frac{4\pi i}{3}} \int_0^R \frac{x}{1+x^3}\ \mathrm{d}x$.

Daher ist $\frac{2\pi i}{3} e^{\frac{5\pi i}{3}} = \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = (1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}) \int_0^R \frac{x}{1+x^3}\ \mathrm{d}x$ für alle $R > 1$. Grenzwertübergang $R \to \infty$ liefert $\frac{2\pi i}{3} e^{\frac{5\pi i}{3}} = (1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}) \int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}\ \mathrm{d}x$, unser Integral hat also den Wert

$$\frac{2\pi i}{3 - 3e^{\frac{4\pi i}{3}}} e^{\frac{5\pi i}{3}} = 2\pi i \frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{6e^{\frac{2\pi i}{3}} - 6} = 2\pi \frac{-\sqrt{3} + i}{-9 + \sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

PBZ Wir faktorisieren den Nenner über $\mathbb{R}$. Es gilt $1 + x^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, wobei das quadratische Polynom keine reellen Nullstellen besitzt (negative Diskriminante oder zuvor bestimmte Nullstellen des Nenners über $\mathbb{C}$). Wir machen daher den Ansatz $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \implies$

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (B + C - A)x + (A + C).$$

Koeffizientenvergleich liefert ein lineares System, das die Lösung $(A, B, C) = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$ besitzt.

Daher ist $f(x) = \frac{-1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}$. Stammfunktionen der ersten beiden Summanden kann man sofort ablesen, der erste Summand hat $-\frac{1}{3} \ln|x+1|$ als Stammfunktion und der zweite $\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)$. Wir bestimmen eine Stammfunktion des dritten Summanden (ohne Vorfaktor).

Zunächst schreiben wir $\dfrac{1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, substituieren $y = x - \frac{1}{2}$ und erweitern, um $\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(\frac{2y}{\sqrt{3}})^2 + 1}$ zu erhalten. Eine Stammfunktion dieser Funktion ist $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2y}{\sqrt{3}})$ und der dritte Summand besitzt $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$ als Stammfunktion.

Wir können das Integral nun auswerten, indem wir R und 0 in die Stammfunktion einsetzen und R gegen ∞ streben lassen. Es ist $\int_0^R f(x)\ \mathrm{d}x =$

$$\left[-\frac{1}{3}\ln|x + 1| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2R - 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{R^2 - R + 1}{R^2 + 2R + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

wobei die Symmetrie der Arkustangensfunktion und die Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion benutzt worden sind. Für $R \to \infty$ konvergiert der erste Summand gegen $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, und der zweite gegen 0. Wegen $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$ ist der Integralwert also $\frac{\pi}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

J.F.B.