Frühjahr 16 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei 0.

b) Es sei $\gamma : [0{,}2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ t \mapsto e^{2it}$. Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$.

c) Es sei $U := \{z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Zeigen Sie, dass es keine Folge von Polynomfunktionen $(p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $(p_n|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

Lösungsvorschlag:

a) Wir nutzen die Taylorreihe der Sinusfunktion, um die Laurentreihe von f um 0 zu entwickeln. Aus $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ folgt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}$ für $z \neq 0$. Der Hauptteil bricht nie ab und die Singularität ist wesentlich.

b) Wir benutzen den Residuensatz. $\mathbb{C}$ ist eine offene, konvexe Menge und f ist darauf bis auf endlich viele Singularitäten holomorph. Der Weg γ ist geschlossen und glatt und berührt keine Singularität. Der Weg umkreist die Singularität zweimal im positiven Umlaufsinn und das Residuum von f bei 0 lässt sich aus der Laurentreihe ablesen. Es beträgt $\operatorname{Res}_f(0) = 1$. Nach dem Residuensatz, ist der Wert des gesuchten Integrals also durch $2\pi i \cdot 2 \cdot 1 = 4\pi i$ gegeben.

c) Aus lokal gleichmäßiger Konvergenz folgt auch kompakte Konvergenz (in $\mathbb{C}$ gilt sogar die Umkehrung). Gäbe es eine solche Folge, so würde diese also auf der in U enthaltenen, kompakten Menge $K = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{3}{4} \leq |z| < \frac{3}{2}\}$ gleichmäßig gegen die Einschränkung von f auf K konvergieren. Weil Polynome ganz sind, verschwindet nach Cauchys Integralsatz das Integral über jeden geschlossenen Weg bezüglich eines Polynoms, die Einschränkung der Polynome auf U respektive K ändert hieran nichts. Der Weg γ aus b) verläuft vollständig in K und bei gleichmäßiger Konvergenz vertauschen Konvergenz und Integration. Für eine solche Folge müsste also

$$4\pi i = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma p_n(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

gelten, was natürlich falsch ist. Demnach existiert keine solche Folge.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$