Frühjahr 16 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Zeigen Sie:

1. Der Konvergenzradius von f ist 1.
2. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $|f(z^{2^k})| \leq |f(z)| + k$.
3. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und ρ eine 2^k-te Einheitswurzel. Dann gilt $\lim\limits_{t \to 1, 0<t<1} |f(t\rho)| = \infty$.
4. Für keinen Punkt z des Randes seines Konvergenzgebiets ist f auf eine offene Umgebung von z holomorph fortsetzbar.

Lösungsvorschlag:

1. Nachdem die Reihe eine Teilreihe der geometrischen Reihe ist, handelt es sich bei der geometrischen Reihe um eine konvergente Majorante und der Konvergenzradius beträgt mindestens 1. Weil für $z = 1$ die Reihe divergiert und $|1 - 0| = 1$ gilt, ist der Konvergenzradius maximal 1 und daher genau 1.

2. Für $|z| < 1$ ist $|z^{2^k}| < 1^{2^k} = 1$ und die Reihe konvergiert absolut. Demnach folgt

$$f(z^{2^k}) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{2^k})^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^k \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{k+n}} = \sum_{n=k}^{\infty} z^{2^n} = f(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{2^n}.$$

   Anwendung der Dreiecksungleichung liefert

$$|f(z^{2^k})| \leq |f(z)| + \sum_{n=0}^{k-1} 1 = |f(z)| + k.$$

3. Aus 2. folgt wegen $(t\rho)^{2^k} = t^{2^k}$ und $|t\rho| = |t| < 1$ die Abschätzung

$$|f(t\rho)| \geq |f(t^{2^k})| - k \to \infty$$

   für $t \to 1$. Dies folgt, weil f auf der offenen Einheitskreisscheibe stetig ist und bei 1 explodiert.

4. Dies ist nach 3. klar, falls z eine k-te Einheitswurzel ist. Diese liegen dicht auf dem Rand von $B_1(0)$, denn $\gamma : [0,2\pi] \to \partial B_1(0), t \mapsto e^{it}$ ist surjektiv und stetig und die Menge $M = \{2\pi \frac{n}{k} : 0 \leq n \leq k;\ n, k \in \mathbb{N}_0\} = 2\pi(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ ist dicht in $[0,2\pi]$, und $\gamma(m)$ ist eine k-te Einheitswurzel für alle $m \in M$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$. Wäre nun f in irgendeinen Randpunkt fortsetzbar, so würde diese offene Umgebung irgendeine k-te Einheitswurzel enthalten, was aber 3. widerspricht, weil holomorphe Funktionen stetig sind.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$