Frühjahr 16 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

1. Stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.
2. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ einer stetig differenzierbaren, streng monotonen Funktion $f : (a, b) \to (c, d)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/(1 + x^2)$ ist reell-analytisch, und ihre Potenzreihendarstellung bei $x = 0$ besitzt den Konvergenzradius 1.

Lösungsvorschlag:

1. Dies ist wahr. Angenommen es gäbe ein Beispiel einer nicht gleichmäßig stetigen Funktion $f \in C([a, b])$, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Wahl $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ Punkte $x_n, y_n \in [a, b]$ existieren, für die $|x_n - y_n| < \delta_n = \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ ist. Weil $[a, b]$ kompakt ist, gibt es einen Häufungspunkt $x \in [a, b]$ und eine Teilfolge x_{n_k}, die für $k \to \infty$ gegen x konvergiert. Es konvergiert dann auch y_{n_k} gegen x, weil $|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x| \to 0$ für $k \to \infty$ gilt. Außerdem konvergieren, wegen der Stetigkeit von f, $f(x_{n_k})$ und $f(y_{n_k})$ gegen $f(x)$. Dann ist aber
$$0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0, \quad \text{für } k \to \infty,$$
also $0 < \varepsilon \leq 0$, ein Widerspruch. Die Annahme war demnach falsch und f ist gleichmäßig stetig.

2. Dies ist falsch. Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist eine streng monoton wachsende und stetig differenzierbare Abbildung von $(-1{,}1)$ in sich selbst. Die Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, ist aber nicht stetig differenzierbar, weil sie bei 0 nicht differenzierbar ist. Für $x \neq 0$ ist die Ableitung durch $x \mapsto -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ gegeben, was für $x \to 0$ gegen $+\infty$ divergiert, also nicht stetig in 0 fortgesetzt werden kann. (Dies zeigt, dass die Umkehrfunktion nicht stetig differenzierbar ist, was hier bereits ausreicht.)

3. Dies ist wahr. Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-i, +i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 1/(1+z^2)$ ist holomorph und besitzt um jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{R}$ die Potenzreihenform $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$. Wegen $z_0 \in \mathbb{R}$ stimmen die Ableitung mit der reellen Ableitung von $f|_{\mathbb{R}}$ überein und diese Darstellung besitzt reelle Koeffizienten. Für $x = 0$ erhalten wir mit der geometrischen Reihe $f(x) = 1/(1 - (-x^2)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, der Konvergenzradius ergibt sich aus der geometrischen Reihe aus $|x^2| < 1 \iff |x|^2 < 1 \iff |x| < 1$ als 1, kann aber genauso mit den Formeln von Euler oder Cauchy-Hadamard ermittelt werden.

J.F.B.