**Frühjahr 16 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen**
**Analysis (vertieftes Lehramt)**

Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \quad , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sin(x)$$

auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$

1. für alle Anfangswerte $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $\phi_{z_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ besitzt;
2. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x,y) = y^2/2 - \cos(x)$ eine Erhaltungsgröße ist, also entlang der Lösungskurven von $\phi_{z_0}$ konstant ist.
3. Bestimmen Sie, ob die Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^2$ stabil oder sogar asymptotisch stabil ist.

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Strukturfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y, -\sin(x))$ ist glatt, also lokal lipschitzstetig; nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert zu jeder Anfangsbedingung genau eine maximal fortgesetzte Lösung. Weiterhin ist $\|f(x,y)\|_1 = |y| + |\sin(x)| \leq |y| + 1 \leq \|(x,y)\|_1 + 1$; demnach bleibt das Wachstum linear beschränkt und jede Maximallösung ist auf $\mathbb{R}$ definiert.

b) Ist $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems, so ist $z(t) = F(x(t), y(t))$ differenzierbar mit $z'(t) = y(t)y'(t) + \sin(x(t))x'(t) = -y(t)\sin(x(t)) + \sin(x(t))y(t) = 0$, also ist $z$ konstant und $F$ eine Erhaltungsgröße.

c) Erhaltungsgrößen sind Lyapunovfunktionen, die Ruhelage 0 ist ein lokales, striktes Minimum von $F$, denn es gilt $F(x,y) \geq 0 - 1 = -1 = F(0{,}0)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit Gleichheit genau dann, wenn $y = 0$ und $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Damit ist 0 ein striktes Minimum auf $B_{2\pi}(0)$ und 0 ist stabil.
Die Ruhelage ist aber nicht asymptotisch stabil, sei dazu $\delta > 0$ beliebig und $(x(t), y(t))$ eine Lösung zur Anfangsbedingung $z_0 = (\delta, 0)$. Würde für $t \to \infty$ nun $(x(t), y(t)) \to (0{,}0)$ gelten, so auch $F(x(t), y(t)) \to F(0{,}0) = -1$, weil $F$ stetig ist, es gilt aber $F(x(t), y(t)) = F(\delta{,}0) > -1$, weil $F$ eine Erhaltungsgröße ist. Per Definitionem ist daher 0 nicht asymptotisch stabil, weil wir Anfangswerte finden, die beliebig nahe an 0 liegen, deren zugehörige Lösung aber nicht gegen 0 konvergiert, 0 ist also nicht attraktiv.

$\mathcal{J.F.B.}$