Frühjahr 16 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}^2, f(x) := ((1 - |x|)^{-1}, |x|)$.
Zeigen Sie:

(a) Das Anfangswertproblem
$$\dot{x} = f(x), x(0) = 0$$
besitzt eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung.

(b) Für diese maximale Lösung $x :]a, b[\to D$, wobei $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, ist $b \leq 1, x(b) := \lim_{t \to b} x(t)$ existiert, und $|x(b)| = 1, 0 < x_2(b) < 1/4$.
Hinweis: Die Trajektorie der Lösung lässt sich als Graph einer Funktion darstellen und deren Ableitung lässt sich geeignet abschätzen.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir zeigen, dass f lokal lipschitz stetig ist, dann folgt die Aussage, die wir zeigen sollen, direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Sei dazu $x \in D$ und $\delta = \frac{1-|x|}{2}$, dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^2$ mit $|x - y| < \delta$ auch $y \in D$ und $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, wobei $L = 1 + \frac{2}{(1-|x|)^2}$.
Um das zu beweisen, nutzen wir, dass es sich bei $|x| = \|x\|_2$ um die 2-Norm handelt und, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ die Ungleichung $|x_1| + |x_2| = \|x\|_1 \geq \|x\|_2 = |x|$ gilt, und, dass für Normen die Dreiecksungleichung und die umgekehrte Dreiecksungleichung gelten.
Sei $x \in D$ und $|x - y| < \delta$, dann ist $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| < \delta + |x| = \frac{1+|x|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$, also $y \in D$.
Weiter gilt $|f(x) - f(y)| \leq \|f(x) - f(y)\|_1 = |(1 - |x|)^{-1} - (1 - |y|)^{-1}| + ||x| - |y||$
$$= \frac{||x| - |y||}{(1 - |x|)(1 - |y|)} + ||x| - |y|| \leq |x - y| \cdot \frac{1}{(1 - |x|)(1 - \frac{1+|x|}{2})} + |x - y| = L|x - y|.$$

(b) Für die Komponenten der Lösung gelten $x_1'(t) > 0$ und $x_2'(t) \geq 0$, wegen $x_1(0) = 0 = x_2(0)$ sind also beide Komponenten nichtnegativ für $t \geq 0$. Außerdem wachsen beide Komponentenfunktionen monoton und bleiben beschränkt, weil $0 \leq x_1(t), x_2(t) \leq |x(t)| < 1$ nach der Definition einer Lösung gilt. Es existieren also die Grenzwerte für $t \to b$ und damit existiert $x(b)$.
Wir zeigen jetzt, dass $b \leq 1$ ist, dazu schätzen wir die erste Komponente ab. Aus $x_1'(t) = (1-|x(t)|)^{-1} \geq (1-|x_1(t)|)^{-1}$ folgt nach Multiplikation des positiven, letzten Terms $x_1'(t) - x_1'(t)x_1(t) \geq 1$ für alle $t \in [0, b[$. Daher folgt
$$t = \int_0^t 1 \text{ d}s \leq \int_0^t x_1'(s) - x_1'(s)x_1(s) \text{ d}s = x_1(t) - \frac{x_1(t)^2}{2} \leq x_1(t) < 1$$
für alle $t \in [0, b[$ und insbesondere wegen $t < 1$ auch $b \leq 1$.
Zum Limes erinnern wir uns an das Randverhalten maximaler Lösungen. Haben Maximallösungen einer Differentialgleichung mit lokal lipschitzstetiger Strukturfunktion eine endliche Entweichzeit, so muss die Lösung am Rand unbeschränkt sein oder

sich dem Rand des Definitionsbereichs nähern. Weil die Lösungen hier aber durch 1 beschränkt bleiben, muss die Lösung sich dem Rand nähern, und weil der Grenzwert existiert, folgt $\lim_{t\to b} x(t) \in \partial D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Daher ist $|x(b)| = 1$.

Ein bekanntes Resultat der Theorie zu zweidimensionalen autonomen Systemen, auf das der Hinweis hinweist, ist dass die Funktion $t \mapsto (x_1(t), x_2(x_1(t)))$ eine Lösung der Differentialgleichung $v' = |(t,v)|(1 - |(t,v)|)$ zur Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ist, was wir hier ohne Beweis verwenden. Hier gilt $0 \leq |(t,v)| < 1$, weshalb wir $0 \leq |(t,v)|(1 - |(t,v)|) \leq \frac{1}{4}$ erhalten. Damit ist die Ableitung der Lösung durch $\frac{1}{4}$ beschränkt und wegen $0 \leq t < 1$ muss $v(t) = \int_0^t v'(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t \frac{1}{4}\,\mathrm{d}s = \frac{t}{4} < \frac{1}{4}$ gelten. Insbesondere ist also $0 \leq x_2(t) < \frac{1}{4}$ für $0 \leq t < b$ und im Grenzwert $t \to b$ folgt die Behauptung $0 \leq x_2(b) \leq \frac{1}{4}$. Die erste Ungleichung ist strikt, weil sonst $x_2(0) = 0 \leq x_2(t) \leq x_2(b) = 0$ für $t \in (0,b) \neq \emptyset$ folgen würde, ein Widerspruch, weil dann $x_2'(t) = |x(t)| = 0$ und damit $f(x(t)) = 0$ sein müsste, was, wegen $f(x(0)) = (1,0)$ nicht der Fall ist. Die letzte Ungleichung ist strikt, weil wir aus der Anfangsbedingung $v'(0) = 0$ und damit $v' < \frac{1}{8}$ auf $[0,\varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ herleiten können, denn v' ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Damit gilt sogar $v(b) \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{1-\varepsilon}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{8} < \frac{1}{4}$, woraus auch $x_2(b) < \frac{1}{4}$ folgt.

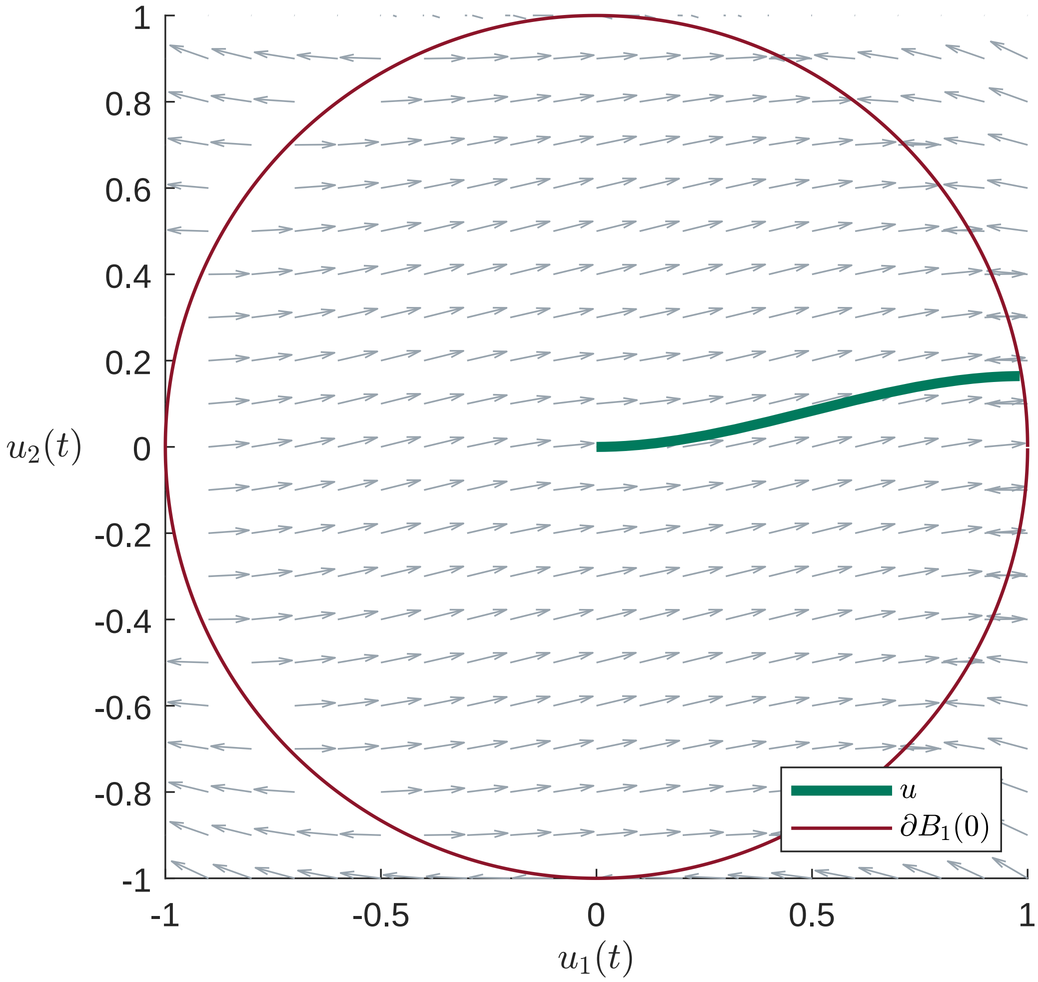

Abbildung 1: Die Lösungskurve in grün mit hinterlegtem Gradientenfeld.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$