F16T1A2

a) Zeige für alle natürlichen Zahlen n

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2) = n^4 - 2n^2 - n$$

b) Zeige durch Induktion in n, dass für $G_r(k) := \prod_{l=0}^{r-1}(k+l)$ (also mit $G_0(k) = 1$) die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} G_r(k) = \frac{1}{r+1} G_{r+1}(n)$$

gelten, für alle $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

zu a):

Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion in $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Für n=1 gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = -2 = 1 - 2 - 1 = n^4 - 2n^2 - n.$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, und es gelte für dieses n:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2) = n^4 - 2n^2 - n$$

Induktionsbehauptung: Zu zeigen ist nun:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(4k^3 - 6k^2) = (n+1)^4 - 2(n+1)^2 - (n+1).$$

Induktionsschluss: Die Behauptung folgt so:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(4k^3 - 6k^2) &= (4(n+1)^3 - 6(n+1)^2) + \sum_{k=0}^{n}(4k^3 - 6k^2)\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} (4(n+1)^3 - 6(n+1)^2) + n^4 - 2n^2 - n\\ &\overset{(*)}{=} (n+1)^4 - 2(n+1)^2 - (n+1)\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$(*) : [(n+1)^4 - 2(n+1)^2 - (n+1)] - [n^4 - 2n^2 - n] =$$
$$= (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 2(2n+1) - 1 = 4n^3 + 6n^2 - 2 =$$
$$= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 6(n^2 + 2n + 1) = 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2.$$

zu b):

Im folgenden Induktionsbeweis ist $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fest.
Induktionsanfang: Für n=1 gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} G_r(k) = G_r(1) = \prod_{l=0}^{r-1}(1+l) = \frac{r+1}{r+1}\prod_{l=0}^{r-1}(1+l) =$$
$$= \frac{1}{r+1}\prod_{l=0}^{r}(1+l) = \frac{1}{r+1}G_{r+1}(1)$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, und es gelte für dieses n:

$$\sum_{k=1}^{n} G_r(k) = \frac{1}{r+1}G_{r+1}(n)$$

Induktionsbehauptung: Zu zeigen ist nun:

$$\sum_{k=1}^{n+1} G_r(k) = \frac{1}{r+1}G_{r+1}(n+1)$$

Induktionsschluss: Die Behauptung folgt so:

$$\sum_{k=1}^{n+1} G_r(k) = G_r(n+1) + \sum_{k=1}^{n} G_r(k) \overset{\text{I.V.}}{=} G_r(n+1) + \frac{1}{r+1}G_{r+1}(n) =$$
$$= \prod_{l=0}^{r-1}(n+1+l) + \frac{1}{r+1}\prod_{l=0}^{r}(n+l) \overset{(n+1+r-1)=n+r}{=} \prod_{l=0}^{r-1}(n+1+l) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} \cdot n\right) =$$
$$= \prod_{l=0}^{r-1}(n+1+l) \cdot \left(\frac{r+1+n}{r+1}\right) = \prod_{l=0}^{r}(n+1+l) \cdot \left(\frac{1}{r+1}\right)$$
$$= \frac{1}{r+1}\prod_{l=0}^{r}(n+1+l) = \frac{1}{r+1}G_{r+1}(n+1)$$