**Frühjahr 16 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

(a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{C}$, welche in den Punkten $-1$ und $1$ wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = -1,\ \mathrm{Res}_1(f) = 1$$

besitzt. Ist $f$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

(b) Sei $f$ die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei $\gamma_\alpha$ der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, -2 - i, -2 + i, 2 - \alpha i, 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von $\alpha$ ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z)\mathrm{d}z$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von $\alpha$.

**Lösungsvorschlag:**

(a) Wir betrachten die Funktion $f(z) = \exp((z-1)^{-1}) - \exp((z+1)^{-1})$, die auf der angegebenen Menge holomorph ist. Der zweite Summand ist holomorph in 1 und lässt sich dort lokal in eine Potenzreihe entwickeln, d. h. $\exp((z+1)^{-1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$. Der erste Summand lässt sich durch die Taylorreihe der Exponentialfunktion um 1 in eine Laurentreihe entwickeln, womit wir $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{-n} + (1+a_0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^n$ erhalten. Daraus lässt sich ablesen, dass der Hauptteil der Laurentreihe von $f$ nicht abbricht und das Residuum durch 1 gegeben ist. Völlig analog behandelt man $-1$.
Die Eigenschaften bestimmen $f$ nicht eindeutig. Ersetzt man exp durch sin oder addiert eine ganze Funktion zu $f$, so erhält man eine weitere Funktion mit den geforderten Eigenschaften.

(b) Das Integral ist genau dann wohldefiniert, wenn der Weg durch keine Singularität von $f$ verläuft. Wir betrachten die Geradensegmente getrennt.
Das erste Segment verbindet $2 + \alpha i$ mit $-2 - i$, was durch

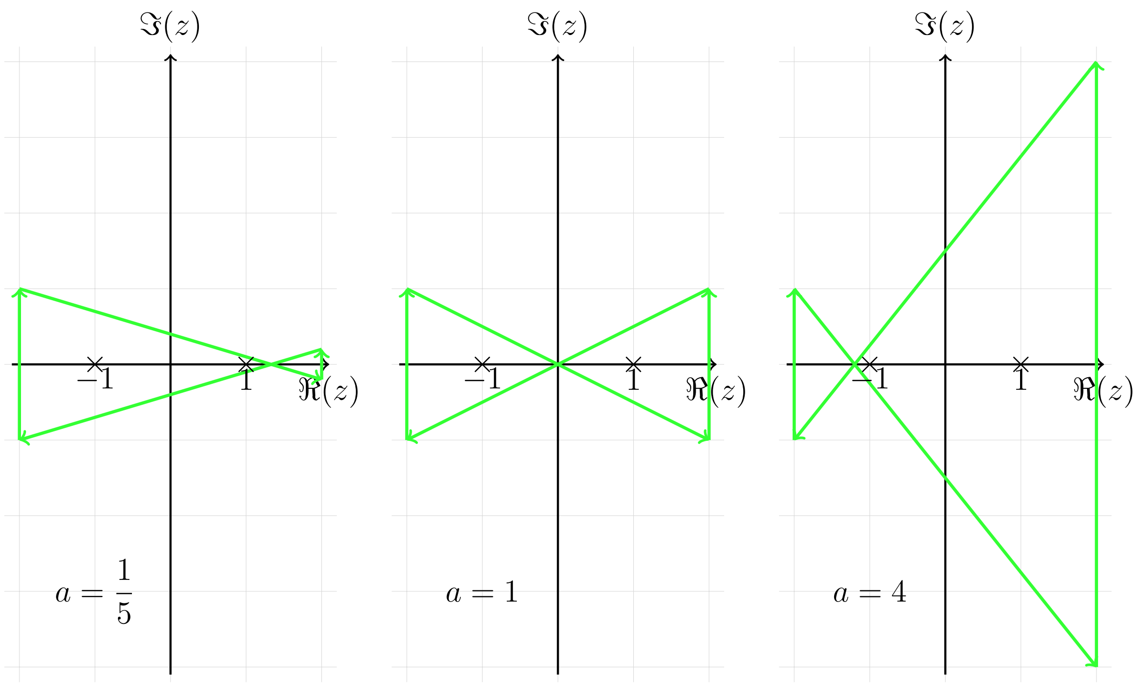
$$[0,1] \ni t \mapsto 2 + \alpha i + t(-4 - (1+\alpha)i) = (2 - 4t) + (\alpha - t(1+\alpha))i$$

parametrisiert werden kann. Damit dieser Weg durch eine Singularität verläuft, muss der Imaginärteil eine Nullstelle haben, was genau für $t = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \dfrac{1}{1+\alpha}$ passiert (für $\alpha \in [0, \infty[$ liegt $t$ auch im Intervall $[0,1]$). Wir lösen diese Darstellung nach $\alpha$ auf und erhalten $\alpha = -\frac{t}{t-1}$. Damit der Weg durch eine Singularität von $f$ verläuft,

muss $2-4t=\pm 1$, also $t=\frac{1}{4}$ oder $t=\frac{3}{4}$ gelten. Daraus ergibt sich $\alpha=\frac{1}{3}$ und $\alpha=3$, für diese Werte ist das Wegintegral nicht definiert.
Der Weg $[0{,}2]\ni t\mapsto -2-i+ti=-2+(t-1)i$ verbindet die nächsten beiden Punkte und durchläuft keine Singularität, weil der Realteil stets -2 ist.
Der dritte Abschnitt kann durch

$$[0{,}1]\ni t\mapsto -2+i+t(4-(1+\alpha)i)=4t-2+(1-t(1+\alpha))i$$

parametrisiert werden, wie zuvor bestimmen wir die Nullstelle des Imaginärteils $t=\frac{1}{1+\alpha}$ (was wieder in $[0{,}1]$ liegt, falls $\alpha\in[0,\infty[$ ist) und stellen nach $\alpha$ um. Es ergibt sich $\alpha=\frac{1-t}{t}$. Wieder betrachten wir $4t-2=\pm 1$, um $t=\frac{3}{4}$ oder $t=\frac{1}{4}$ zu erhalten. Für $\alpha$ ergibt sich genau wie zuvor $\alpha=\frac{1}{3}$ oder $\alpha=3$.
Das letzte Geradenstück ergibt sich durch $[0,2\alpha]\ni t\mapsto 2-\alpha i+ti=2+(t-\alpha)i$ und berührt wieder keine Singularität, weil der Realteil konstant 2 ist.
Das Kurvenintegral existiert demnach genau für $\alpha\neq\frac{1}{3},3$.
Wir können den Wert des Integrals mit dem Residuensatz berechnen, weil $f$ holomorph auf der offenen, konvexen Menge $\mathbb{C}$ ist, wenn man von endlich vielen Singularitäten absieht. Der Weg $\gamma_\alpha$ ist dann stückweise glatt und verläuft für die adäquaten Werte für $\alpha$ durch keine Singularität. Wir untersuchen welche Singularität wie oft umschlossen wird. Die Abbildungen am Ende zeigen je ein Beispiel für jeden Fall.
Es gibt drei Fälle zu unterscheiden. Für $\alpha\in[0,\frac{1}{3})$ werden beide Singularitäten umschlossen und zwar im Uhrzeigersinn, d. h. in negativer Richtung. In diesem Fall beträgt der Wert des Pfadintegrals $2\pi i((-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1)=0$ nach dem Residuensatz.
Für $\alpha\in(\frac{1}{3},3)$ wird $-1$ in negativer Richtung umlaufen und 1 in positiver Richtung. Für den Wert des Integrals gilt nach dem Residuensatz nun, dass sich der Wert zu $2\pi i((-1)\cdot(-1)+1\cdot 1)=4\pi i$ berechnet.
Für $\alpha\in(3,\infty)$ werden beide Singularitäten in positiver Richtung umkreist und der Integralwert beträgt $2\pi i(1\cdot(-1)+1\cdot 1)=0$.




$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$