Frühjahr 15 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> (a) Zeigen Sie: Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^3 = z$ für alle $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$.
> ***Hinweis:*** *Wenden Sie zunächst den Riemannschen Hebbarkeitssatz an.*
>
> (b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, die den beiden Bedingungen $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und
> $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\mathrm{d}t = 1$$
> genügt?
> ***Hinweis:*** *Maximumprinzip für $\frac{1}{f}$ bzw. Minimumprinzip für f.*

Lösungsvorschlag:

(a) Angenommen, es gäbe eine solche Funktion, dann wäre $|f(z)| \leq \sqrt[3]{|z|} < \sqrt[3]{\varepsilon}$ auf $B_\varepsilon(0)$, d. h. f wäre um 0 beschränkt und besäße demnach eine hebbare Singularität. Weiter würde dann $f(0)^3 = \lim\limits_{z\to 0} f(z)^3 = \lim\limits_{z\to 0} z = 0$, also $f(0) = 0$ folgen, die holomorphe Fortsetzung von f besäße also eine Nullstelle bei 0. Wir könnten dann $f(z) = zg(z)$ mit einer holomorphen, demnach auf $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$ beschränkten, Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ schreiben und $z^3 g(z)^3 = z$ für $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ folgern. Für diese z wäre dann $z^2 g(z)^3 = 1$, also $1 = \lim\limits_{z\to 0} 1 = \lim\limits_{z\to 0} z^2 g(z)^3 = 0$, ein Widerspruch. Also gibt es kein solches f.

(b) Nein. Aus der Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen, bzw. der Cauchyschen Integralformel folgt für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$ nämlich

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(e^{it})}{e^{it}} ie^{it}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\mathrm{d}t = 1,$$

also $|f(0)| = 1$. Weil f per Voraussetzung keine Nullstelle besitzt, muss $|f|$ ein Minimum auf $\overline{\mathbb{D}}$ besitzen und darf es nur am Rand annehmen. Aus den Voraussetzungen würde aber $|f(0)| = 1 < |f(z)|$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ folgen, ein Widerspruch. Demnach gibt es keine solche Funktion.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$