Frühjahr 15 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Es sei f holomorph in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit einem Pol 1. Ordnung in $z = 0$. Weiter seien $\alpha \in (0, 2\pi), \varepsilon > 0$ und $\gamma_\varepsilon : [0, \alpha] \to \mathbb{C}, \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ für $t \in [0, \alpha]$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(\xi) \, \mathrm{d}\xi = i\alpha \, \mathrm{res}(0, f).$$

Hier bezeichnet $\mathrm{res}(0, f)$ das Residuum von f im Punkt $z = 0$

(b) Die stetige Funktion $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $\mathbb{D}$. Ferner seien m_1 und m_2 reell und positiv, derart, dass für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ gilt

$$|f(\zeta)| \leq m_1 \text{ falls } \mathrm{Im}\zeta \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |f(\zeta)| \leq m_2 \text{ falls } \mathrm{Im}\zeta \leq 0.$$

Beweisen Sie, dass $|f(0)| \leq \sqrt{m_1 m_2}$.
Hinweis: *Betrachten Sie die Funktion* $f(z)f(-z)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir entwickeln f in eine Laurentreihe um 0 und trennen in Haupt- und Nebenteil auf. Es gibt demnach eine ganze Funktion g mit $f(z) = g(z) + \frac{\mathrm{res}(0,f)}{z}$, $z \neq 0$, denn so ist das Residuum definiert. Es gilt $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(\xi) \, \mathrm{d}\xi = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{res}(0,f)}{\xi} \mathrm{d}\xi$, wir untersuchen die Summanden separat.
g ist holomorph auf $\mathbb{C}$, daher stetig und somit beschränkt auf $\overline{B_1(0)}$ durch ein $K > 0$. Für $\varepsilon \leq 1$ ist $\gamma_\varepsilon(t) \in \overline{B_1(0)}$ für alle $t \in [0, \alpha]$. Demnach können wir folgendermaßen abschätzen: $0 \leq |\int_{\gamma_\varepsilon} g(\xi) \, \mathrm{d}\xi| \leq K|\gamma_\varepsilon| = K\varepsilon\alpha \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$, also ist der erste Summand 0. Dagegen rechnen wir den zweiten Summanden explizit aus. Für $\varepsilon > 0$ ist $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{res}(0,f)}{\xi} \mathrm{d}\xi = \int_0^\alpha i \, \mathrm{res}(0, f) \, \mathrm{d}\xi = i\alpha \, \mathrm{res}(0, f)$ unabhängig von ε. Im Grenzwert bleibt dies natürlich gleich und die Aussage ist gezeigt.

(b) Die Funktion $g(z) := f(z)f(-z)$ ist wieder holomorph auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Nach dem Maximumsprinzip nimmt g das Maximum auf $\overline{\mathbb{D}}$ am Rand an. Für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt $|g(z)| \leq m_1 m_2$, denn falls $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ ist, ist $\mathrm{Im}(-z) \leq 0$ und daher $|g(z)| = |f(z)||f(-z)| \leq m_1 m_2$ und falls $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ ist, ist $\mathrm{Im}(-z) \geq 0$ und daher $|g(z)| = |f(z)||f(-z)| \leq m_2 m_1 = m_1 m_2$. Nach dem Maximumsprinzip gilt also $|f(0)|^2 = |f(0)f(-0)| = |g(0)| \leq m_1 m_2$ und Radizieren liefert die behauptete Ungleichung.

$\mathcal{J.F.B.}$