Frühjahr 15 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t & 1\\ 1 & e^t\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}.$$

Man zeige, dass die eindeutige Lösung von der Form

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix}f(t) & g(t)\\ g(t) & f(t)\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$$

ist und bestimme die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag:

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert genau eine Lösung. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann besitzt die Matrix $\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$ den Eigenwert $a+b$ zum Eigenvektor $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ und den Eigenwert $a-b$ zum Eigenvektor $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$. Wir erhalten daher

$$e^{\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{a+b} & 0\\ 0 & e^{a-b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = e^a\begin{bmatrix}\cosh(b) & \sinh(b)\\ \sinh(b) & \cosh(b)\end{bmatrix}.$$

Die angegebene Funktion besitzt nach der Kettenregel die Ableitung $\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f'(t) & g'(t)\\ g'(t) & f'(t)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}$. Um auch noch die Anfangsbedingung zu erfüllen, wählen wir also als f, g die Stammfunktion von e^t,1 die bei 0 eine Nullstelle hat, also $f(t) = e^t - 1, g(t) = t$. Damit ergibt sich als Lösung die Funktion $\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = e^{e^t-1} \cdot \begin{bmatrix}\cosh(t) & \sinh(t)\\ \sinh(t) & \cosh(t)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$. Man rechnet leicht nach, dass es sich hierbei tatsächlich um die Lösung handelt und sieht sofort, dass die Lösung die behauptete Form hat.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$