Frühjahr 15 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= -e^x - 2y + 1, \\ y' &= 2x - y. \end{aligned}$$

Man bestimme alle Ruhepunkte dieses Systems und untersuche diese auf Stabilität.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen die Nullstellen der Strukturfunktion. Damit die zweite Komponente verschwindet, muss $y = 2x$ gelten. Eingesetzt in die erste Komponente folgt $-e^x - 4x + 1 = 0$. Man sieht, dass $x = 0$ eine Lösung ist, wir zeigen, dass es die einzige ist. Demnach ist die einzige Ruhelage des Systems dann $(0, 0)$.
Für reelle Zahlen mit $x < y$ gilt $e^x < e^y$ und $-4x > -4y$ also auch $-e^x - 4x + 1 > -e^y - 4y + 1$. Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto -e^x - 4x + 1$ ist also streng monoton fallend und demnach injektiv. Also ist 0 die einzige Nullstelle. Wir leiten die Strukturfunktion ab und erhalten $J(x, y) = \begin{pmatrix} -e^x & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, also $J(0{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Die Eigenwerte der Matrix sind die Nullstellen von $(-1 - \lambda)^2 + 4$, also die Zahlen $\lambda = -1 \pm 2i$. Aus dem Linearisierungssatz folgt nun, dass die einzige Ruhelage (0,0) des Systems asymptotisch stabil ist, weil jeder Eigenwert negativen Realteil hat.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$