Frühjahr 15 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Man löse das Anfangswertproblem $x' = x + t, x(0) = -1$

(a) mit der Methode der Variation der Konstanten;

(b) mittels der Picard-Lindelöf-Iteration $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, beginnend mit $\alpha_0(t) \equiv -1$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die homogene Gleichung besitzt die Lösung $x(t) = -e^t$, um das inhomogene Problem zu lösen machen wir den Ansatz $x(t) = -c(t)e^t$. Daraus folgt dann direkt $x'(t) = -(c(t) + c'(t))e^t = x(t) - c'(t)e^t$. Damit x eine Lösung ist, muss also $c'(t) = -te^{-t}$ gelten. Weiter soll $-1 = x(0) = -c(0)$ sein, also ist $c(0) = 1$. Es folgt $c(t) = 1 + \int_0^t -se^{-s}\, \mathrm{d}s = 1 + [(1+s)e^{-s}]_{s=0}^{s=t} = (1+t)e^{-t}$. Die Lösung des Problems ist demnach $x(t) = -e^t(1+t)e^{-t} = -1 - t$.

(b) Die Iterierten sind rekursiv über $\alpha_{n+1}(t) = -1 + \int_0^t \alpha_n(s) + s\, \mathrm{d}s$ definiert. Wir zeigen induktiv, dass $\alpha_n(t) = -1 - t + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für $n = 0$ ist das klar, weil $-1 = -1 - t + t$ ist. Wenn die Formel für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgt für $n + 1$:

$$\alpha_{n+1}(t) = -1 + \int_0^t -1 - s + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} + s\, \mathrm{d}s = -1 + \left[-s + \frac{s^{n+2}}{(n+2)!}\right]_{s=0}^{s=t} = -1 - t + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}$$

wie behauptet. Auf jedem Intervall $[-a, a], a \in [0, \infty)$ konvergiert dies für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $-1 - t$, da dort $\left|\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\right| \leq \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} \to 0$ gilt. Letzteres ist eine Nullfolge nach dem Trivialkriterium, weil die Exponentialreihe für alle $a \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Wir erhalten also wieder die Lösung $x(t) = -1 - t$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$