Frühjahr 15 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und r eine reelle Zahl mit $r > e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $rze^z = 1$ genau eine Lösung in K besitzt.
(Hinweis: Die Verwendung des Satzes von Rouché könnte hier hilfreich sein.)

(b) Sei γ die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 3. Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \mathrm{d}z, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f eine reell-wertige C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $\mathrm{Re}(z) \geq -1$ und daher $|rze^z| = re^{\mathrm{Re}(z)} > e \cdot e^{-1} = 1$, wegen $|1| = 1$ gibt es also sicher keine Lösung der Gleichung in ∂K. Wir betrachten jetzt die C^1-Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$, die ∂K parametrisiert, in der offenen, beschränkten Menge $B_2(0)$ verläuft und dort zusammenziehbar ist. Die Funktion $f(z) = rze^z$ ist ganz und für $|z| = 1$ ist oben die Ungleichung $|f(z)| > 1$ gezeigt worden. Alle Punkte in $K^\circ = B_1(0)$ werden von γ genau einmal in positiver Richtung umkreist, jeder andere Punkt in $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Spur}(\gamma)$ wird dagegen überhaupt nicht umlaufen. Es gilt $f(z) = 0 \iff z = 0$, da $r > e > 0$ und $e^z \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$ ist. Die Nullstelle ist einfach, weil $\frac{f(z)}{z} = re^z$ keine Nullstelle besitzt. Nach dem Satz von Rouché folgt nun

$$1 = \sum_{z \in D} \mathrm{Ord}_f(z) = \sum_{z \in D} \mathrm{Ord}_{f-1}(z),$$

weswegen $f - 1$ genau eine Nullstelle in $B_1(0) \subset K$ besitzt. Für diese ist $f(z) = 1$, also handelt es sich um eine Lösung der Gleichung. Jede weitere Lösung würde eine weitere Nullstelle von $f(z) - 1$ sein, weswegen es genau eine Lösung in K° gibt. Nachdem auf ∂K keine Lösung existiert und $K = K^\circ \cup \partial K$ gilt, folgt die Aussage.

(b) Der Integrand ist holomorph auf der offenen konvexen Menge $\mathbb{C}$, wenn man von den drei (also endlich vielen) Singularitäten $z_0 = 0, z_+ = i - 1, z_- = -i - 1$ absieht. Keine davon liegt auf der Spur von γ, einem geschlossenen, glatten Weg, aber jede wird genau einmal positiv umrundet. Wir können das Integral also mit dem Residuensatz berechnen, dafür bestimmen wir die Residuen. z_0 ist ein Pol zweiter Ordnung, daher gilt $\mathrm{Res}_f(z_0) = (\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2})'(0) = \frac{2t-2}{2^2} = \frac{t-1}{2}$. Die Singularitäten $z_\pm$ sind Pole erster Ordnung, daher ist $\mathrm{Res}_f(z_+) = \frac{e^{z_+ t}}{4z_+^3 + 6z_+^2 + 4z_+}$ und $\mathrm{Res}_f(z_-) = \frac{e^{z_- t}}{4z_-^3 + 6z_-^2 + 4z_-}$.
Nach dem Residuensatz ist $f(t) = \mathrm{Res}_f(z_0) + \mathrm{Res}_f(z_+) + \mathrm{Res}_f(z_-)$, wir wollen dies noch etwas umformen. Zunächst ist $e^{-t \pm it} = e^{-t} e^{\pm it}$. Weiter gilt $z_\pm^2 = \mp 2i$ und daher $4z_\pm^3 + 6z_\pm^2 + 4z_\pm = 4z_\pm(1 \mp 2i) \mp 12i = 4(1 \pm 3i) \mp 12i = 4$.
Setzen wir alles zusammen folgt $f(t) = \frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}}{4}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(t - 1 + e^{-t}\cos(t))$ für $t \in \mathbb{R}$. Natürlich ist $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $f(0) = 0$. Damit ist alles gezeigt.

$\mathcal{J.F.B.}$