Frühjahr 15 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i) = \mathrm{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \qquad z \in U,$$

gilt, wobei $\mathrm{Log} : \Omega_- \to \mathbb{C}$, mit $\Omega_- := \mathbb{C}\backslash\{x + i0 : x \in]-\infty{,}0]\}$ der *Hauptzweig des Logarithmus* ist.

(b) Für jedes $z \in U$ sei $[1, \frac{z}{2}]$ die gerade Strecke in $\mathbb{C}$ von $1 + 0i$ nach $\frac{z}{2}$. Definiere $f : U \to \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(z) := \int_{[1,\frac{z}{2}]} \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi, \qquad z \in U.$$

Zeigen Sie:

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right), \qquad z \in U.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Wir prüfen zunächst, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist. Wegen $\mathrm{Re}(z+i) = \mathrm{Re}(z-i) = \mathrm{Re}(z) > 0$ für $z \in U$ ist die Differenz auf der linken Seite wohldefiniert. ($z \notin \Omega_- \iff \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0$.) Wir formen als nächstes den Quotienten der rechten Seite um. Für $z \in U$ ($\implies z \neq i$) ist $\frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z|^2+1} = \frac{|z|^2-1+2i\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1}$. Der Imaginärteil verschwindet also nicht und der Bruch ist ein Element der Menge Ω_-. Damit ist auch die rechte Seite wohldefiniert. Wir rechnen jetzt einfach nach: $\exp(\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i)) = \exp(\mathrm{Log}(z+i))\exp(\mathrm{Log}(z-i))^{-1} = \frac{z+i}{z-i}$. Aus der Definition des Log als Umkehrfunktion von exp, folgt nun die Aussage, wenn wir $\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i) \in \mathrm{Log}(\Omega_-) = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$ zeigen. Für $w \in U$ ist $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(w)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i)) \in (-\pi, \pi)$.

(b) Für $z \in U$ ist auch $\frac{z}{2} \in U$. Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ ist auf U holomorph und besitzt daher eine Stammfunktion F, weil die Menge U offen und konvex ist. Daher gilt für die Funktion f die Formel $f(z) = F(\frac{z}{2}) - F(1)$ und es folgt $f'(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+(\frac{z}{2})^2}$. Außerdem ist $f(2) = 0$, weil in dem Fall $\frac{z}{2} = 1$, also $[1, \frac{z}{2}] = \{1\}$ ist. Auf Ω_- ist Log holomorph mit $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$, daher gilt

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)\right)' = \frac{i}{2}\frac{z-2i}{z+2i}\frac{z-2i-z-2i}{(z-2i)^2} = \frac{2}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{2}{z^2+4} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+(\frac{z}{2})^2},$$

was mit $f'(z)$ übereinstimmt. Also sind beide Funktionen Stammfunktionen von f auf dem Gebiet U und unterscheiden sich damit nur durch Addition einer Konstanten. Um Gleichheit zu zeigen, genügt es Gleichheit an einem Punkt zu zeigen, wofür wir $z = 2$ wählen. Es ist $\mathrm{Log}(\frac{2+2i}{2-2i}) = \mathrm{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}$ und daher $\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\mathrm{Log}(\frac{2+2i}{2-2i}) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\frac{i\pi}{2} = 0 = f(2)$, wie zuvor begründet.

$\mathcal{J.F.B.}$