**Frühjahr 15 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2.$$

Wie groß kann das Intervall $I$ maximal gewählt werden?
*Hinweis:* Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to ]0; \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen $x$ abhängt. Wir bezeichnen hierbei $u$ als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit $u$ exakt wird.

**Lösungsvorschlag:**

Wir bestimmen zunächst einen integrierenden Faktor. Die vorliegende Differentialgleichung ist von der Form $g(x, y) + h(x, y)y' = 0$ mit $g(x, y) = y^2 + 2x + 5$ und $h(x, y) = y$. Nach Multiplikation mit $u = u(x)$ erhalten wir die Gleichung $\tilde{g}(x, y) + \tilde{h}(x, y)y' = 0$ mit $\tilde{g}(x, y) = (y^2 + 2x + 5)u$ und $\tilde{h}(x, y) = yu$. Damit diese Differentialgleichung exakt wird, muss die Integrabilitätsbedingung erfüllt sein. Wir rechnen also nach:

$$\partial_y \tilde{g}(x, y) = 2yu \overset{!}{=} yu' = \partial_x \tilde{h}(x, y).$$

Die Gleichung ist unabhängig von $y$ immer wahr, wenn $u' = 2u$ gilt, wir können also $u(x) = e^{2x}$ wählen. Tatsächlich ist $u(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Gleichung $y(x)e^{2x}y'(x)+e^{2x}y(x)^2+2xe^{2x}+5e^{2x}$ ist exakt und besitzt die gleiche Lösungsmenge, wie die zu lösende Gleichung.
Wir lösen jetzt die hergeleitete, exakte Differentialgleichung, indem wir ein Erstes Integral bestimmen, also eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_x \Phi(x, y) = \tilde{g}(x, y)$ und $\partial_y \Phi(x, y) = \tilde{h}(x, y)$.
Die zweite Bedingung liefert $\Phi(x, y) = \frac{y^2}{2} e^{2x} + c(x)$, um auch die erste Bedingung zu erfüllen, muss $c'(x) = (2x + 5)e^{2x}$ erfüllen. Wir bestimmen eine Stammfunktion mittels $\int_0^x (2t+5)e^{2t} \, dt = \frac{2t+5}{2} e^{2t}\Big|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x e^{2t} \, dt = \frac{2x+5}{2} e^{2x} - \frac{5}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} = (x+2)e^{2x} - 2$. Weil Stammfunktionen nur eindeutig bis auf Addition einer Konstanten sind, können wir auf die Subtraktion von 2 verzichten und $\Phi(x, y) = (\frac{y^2}{2} + x + 2)e^{2x}$ wählen. Man veriziert leicht durch Nachrechnen, dass diese Funktion tatsächlich ein Erstes Integral ist.
Weil Erste Integrale konstant auf Lösungskurven sind, folgt für die Lösung des Anfangswertproblems die Gleichung $0 = \Phi(-4, -2) = \Phi(x, y(x)) = (\frac{y(x)^2}{2} + x + 2)e^{2x}$ und wegen $e^{2x} > 0$, dann $\frac{y(x)^2}{2} + x + 2 = 0$, was sich nach $y(x)$ auflösen lässt. Wir erhalten $y(x) = -\sqrt{-2x - 4}$ (negative Wurzel, um die Anfangsbedingung zu erfüllen). Die Wurzel ist für $-2x - 4 \geq 0 \iff x \leq -2$ definiert. Man rechnet nach, dass $y(x) = -\sqrt{-2x - 4}$ eine Lösung des Anfangswertproblems für $x \in (-\infty, -2)$ ist (nicht auf $(-\infty, -2]$, weil $\sqrt{-2x - 4}$ bei $x = -2$ nicht differenzierbar ist). $I$ kann also maximal als $(-\infty, -2)$ gewählt werden.

$\mathcal{J.F.B.}$