Frühjahr 15 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für welche $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ist die maximale Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $x(0) = a, x'(0) = b$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Geben Sie (mit Begründung) alle Paare $(c; d) \in \mathbb{R}^2$ an, für welche die zugehörige Differentialgleichung

$$x''(t) + cx'(t) + dx(t) = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

keine beschränkte reelle maximale Lösung besitzt.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung, deren Lösung wir durch Betrachtung des charakteristischen Polynoms finden können. Das charakteristische Polynom hat die Form $x^2+2x+1 = 0$, was die doppelte Nullstelle $x = -1$ besitzt. Die Funktionen $t \mapsto e^{-t}, t \mapsto te^{-t}$ bilden also ein Fundamentalsystem. Wir suchen eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz $t \mapsto c\sin(2t) + d\cos(2t)$ und stellen fest, dass wir für $c = \frac{4}{25}, d = -\frac{3}{25}$ eine partikuläre Lösung erhalten.
Die allgemeine Lösung hat also die Form $\frac{4}{25}\sin(2t) - \frac{3}{25}\cos(2t) + ke^{-t} + lte^{-t}$ mit $k, l \in \mathbb{R}$. Falls $k \neq 0$ oder $l \neq 0$ gilt, ist die Lösung für $t \to -\infty$ unbeschränkt, die einzig mögliche Wahl um die Beschränktheit der Maximallösung zu gewährleisten ist also $k = 0 = l$. In diesem Fall erhalten wir die partikuläre Lösung mit $x(0) = -\frac{3}{25}$ und $x'(0) = \frac{8}{25}$. Das einzige Paar mit der gewünschten Eigenschaft ist also $(a; b) = (-\frac{3}{25}, \frac{8}{25})$.

(b) Wir bestimmen zunächst eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $t \mapsto a\sin(2t) + b\cos(2t)$. Einsetzen in die Differentialgleichung führt durch Koeffizientenvergleich auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} d-4 & -2c \\ 2c & d-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Matrix ist $(d-4)^2 + (2c)^2$, was für $(c; d) \neq (0, 4)$ positiv ist. In diesem Fall ist die Matrix invertierbar und wir finden mit unserem Ansatz eine Lösung der Differentialgleichung, d. h. $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $x(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$ eine Lösung ist. Für diese ist $|x(t)| \leq |a| + |b|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, die Maximallösung ist also beschränkt. Damit ist das einzige Paar, das die gewünschten Eigenschaften haben könnte, das Paar $(c; d) = (0,4)$, was der Gleichung $x''(t) + 4x(t) = \cos(2t)$ entspricht. Diese müssen wir genauer untersuchen.
Die allgemeine homogene Lösung ist nun von der Form $a\sin(2t) + b\cos(2t)$, was unserem obigen Ansatz entspricht. Wir müssen eine andere partikuläre Lösung erraten.

Wir probieren den Ansatz $t \mapsto mt\cos(2t) + nt\sin(2t)$. Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert $m = 0, n = \frac{1}{4}$ und führt zur speziellen Lösung $x(t) = \frac{t}{4}\sin(2t)$.
Die allgemeine Lösung hat nun die Form $x(t) = (a + \frac{t}{4})\sin(2t) + b\cos(2t)$. Es gilt $x(\frac{\pi}{4} + k\pi) = a + \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, was für $k \to \infty$ gegen ∞ divergiert, unabhängig von $a, b \in \mathbb{R}$, weswegen jede Lösung der Differentialgleichung also unbeschränkt ist. Das einzige Paar mit den gewünschten Eigenschaften ist demnach $(c; d) = (0{,}4)$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$