Frühjahr 15 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ der offene zweite Quadrant der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie mit Begründung alle Abbildungen $f : Q \to \mathbb{C}$, die Q biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbilden mit $f(-1+i) = 0$.

Lösungsvorschlag:

Sei $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die offene obere Halbebene der Gaussschen Zahlenebene. Die Cayley-Transformation $C : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ ist bekanntermaßen eine wohldefinierte, biholomorphe Abbildung. Wir werden zunächst zeigen, dass die Funktionen $f_a : Q \to \mathbb{E}$ mit $f(z) = aC(-\frac{z^2}{2})$, wobei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ ist, biholomorph sind und $f_a(-1+i) = 0$ erfüllen. Wir zeigen dazu zunächst, dass die Funktionen $f_a : Q \to \mathbb{E}, z \mapsto aC(-\frac{z^2}{2})$ für $a \in \partial B_1(0)$ bijektiv und wohldefiniert sind. Dass es sich um holomorphe Funktionen handelt ist klar. Anschließend zeigen wir, dass für jede biholomorphe Funktion $g : Q \to \mathbb{E}$ mit $g(-1+i) = 0$ ein $a \in \partial B_1(0)$ mit $g = f_a$ existiert.

Wohldefiniertheit: Sei $z \in Q$, dann ist in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, also ist $z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$. Wegen $2\varphi \in (\pi, 2\pi)$ liegt z^2 in der unteren Halbebene, d. h. es gibt $x \in \mathbb{R}, y < 0$ mit $z^2 = x + iy$. Dann ist $-\frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}iy \in \mathbb{H}^+$, weil $\mathrm{Im}(-\frac{z^2}{2}) = -\frac{y}{2} > 0$ ist. Es folgt $C(-\frac{z^2}{2}) \in \mathbb{E}$ aus den Eigenschaften der Cayley-Transformation und damit $|f_a(z)| = |a||C(-z^2)| < 1$ für alle $z \in Q$. Also ist $f_a : Q \to \mathbb{E}$ wohldefiniert.

Bijektivität: Wir definieren $\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$ und behaupten, dass $q : Q \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{H}^-$ bijektiv ist. Im vorherigen Punkt hatten wir bereits gesehen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Seien $w, z \in Q$ mit $z^2 = w^2$, dann folgt $0 = z^2 - w^2 = (z-w)(z+w)$, also $z = \pm w$. Wäre $z = -w$ so würde aus $z \in Q$ folgen, dass $\mathrm{Re}(z) < 0$ ist und damit $\mathrm{Re}(w) = -\mathrm{Re}(z) > 0$, im Widerspruch zu $w \in Q$. Also muss $z = w$ gelten und die Abbildung ist injektiv. Ist dagegen $z \in \mathbb{H}^-$, so können wir in Polardarstellung $z = re^{i\psi}$ mit $r > 0, \psi \in (\pi, 2\pi)$ schreiben. Dann ist $\sqrt{r}e^{i\frac{\psi}{2}} \in Q$, weil $\frac{\psi}{2} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ist und es gilt $(\sqrt{r}e^{i\frac{\psi}{2}})^2 = re^{i\psi} = z$, also ist die Abbildung auch surjektiv und damit bijektiv.
Für $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sei p_{z_0} die Abbildung $z \mapsto z_0 z$. Diese ist bijektiv mit Inversem $p_{z_0}^{-1} = p_{z_0^{-1}}$.
Wir können nun $f_a = p_a \circ C \circ p_{-\frac{1}{2}} \circ q$ schreiben. Wir hatten bereits gesehen, dass diese Verkettungen wohldefiniert sind und, dass $q : Q \to \mathbb{H}^-, C : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{E}$ bijektiv sind. Die Abbildungen $p_{-\frac{1}{2}} : \mathbb{H}^- \to \mathbb{H}^+, p_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ sind ebenso bijektiv, wie sich sehr leicht einsehen lässt, wenn man zeigt, dass die Funktionen $p_{-\frac{1}{2}} : \mathbb{H}^- \to \mathbb{H}^+; p_{-2} : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{H}^-; p_a, p_{a^{-1}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ wohldefiniert sind. Die Wohldefiniertheit der ersten beiden sieht man durch Betrachtung der Imaginärteile und die der letzten beiden durch Betrachtung der Beträge. Damit ist f_a als Verkettung von vier bijektiven Funktionen selbst bijektiv.

$f_a(-1+i) = 0$: Es gilt $f_a(-1+i) = aC(-\frac{-2i}{2}) = aC(i) = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in \partial B_1(0)$.

Eindeutigkeit: Sei $g : Q \to \mathbb{E}$ biholomorph mit $g(-1+i) = 0$, dann ist $h = g \circ f_1^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ebenso biholomorph und erfüllt $h(0) = g(-1+i) = 0$. Aus der Charakterisierung von $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ folgt, dass h eine Möbiustransformation von der Form $h(z) = \frac{\alpha z}{\overline{\alpha}}$ ist, wobei $|\alpha| = 1$ ist. Das heißt es gilt $g(f_1^{-1}(z)) = az$ für alle $z \in \mathbb{E}$, wobei $a = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}$ ist und $|a| = \frac{|\alpha|}{|\overline{\alpha}|} = \frac{1}{1} = 1$ ist. Für alle $w \in Q$ ist $f_1(w) \in \mathbb{E}$ und daher $g(w) = h(f_1(w)) = af_1(w) = f_a(w)$. Damit ist g von der Form f_a und alles ist gezeigt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$