Frühjahr 15 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

In dieser Aufgabe bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Ferner sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := 6z^6 - 2z^2 + 1$ gegeben.

(a) Formulieren Sie den Satz von Rouché für ganze Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass $B_4(1) \subset f(B_1(0)) \subset B_8(1)$ gilt.
Hinweis: Für den Nachweis der ersten Inklusion könnte der in (a) formulierte Satz hilfreich sein.

(c) Entscheiden Sie mit Beweis, ob $f(B_1(0)) \cap \mathbb{R} = f(B_1(0) \cap \mathbb{R})$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt und g, h meromorph auf einer Umgebung der kompakten Menge $\overline{D}$. Sei Γ in D zusammenziehbar und vermeide Pole und Nullstellen von g. Unter der Annahme

$$|h(z)| < |g(z)| \text{ für alle } z \in \operatorname{Spur}(\Gamma)$$

gilt:

$$\sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma)\ \operatorname{Ord}_{g+h}(z) = \sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma)\ \operatorname{Ord}_g(z).$$

(b) Sei $z_0 \in B_4(1)$, d. h. $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0 - 1| < 4$. Die Menge $D = B_1(0)$ ist offen und beschränkt, die ganzen Funktionen mit $g(z) = 6z^6 - 2z^2$ und $h \equiv 1 - z_0$ und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes, denn als offene Umgebung von $\overline{D}$ können wir $\mathbb{C}$ wählen und Polstellen existieren nicht. Die Nullstellen von g liegen nicht auf der Spur von γ, denn $g(z) = 0 \iff 2z^2(3z^4-1) = 0$, also sind die Nullstellen von g die Zahlen $0, \pm\frac{i}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, deren Betrag kleiner als 1 ist. Die Kurve ist in D zusammenziehbar und für $z \in \operatorname{Spur}(\gamma)$, also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, gilt $|g(z)| \geq ||6z^6| - |2z^2|| = 4 > |h(z)|$. Nach dem Satz von Rouché besitzt die Funktion $g + h$ also 6 Nullstellen mit Vielfachheit in der Menge D, für jede Nullstelle z von $g + h$ gilt aber $f(z) = z_0$, womit $z_0 \in f(B_1(0))$ ist. Also folgt $B_4(1) \subset f(B_1(0))$.
Wegen $|f(z) - 1| \leq |6z^6| + |2z^2| = 6|z|^6 + 2|z|^2 < 6 + 2 = 8$ für $z \in B_1(0)$ folgt $f(B_1(0)) \subset B_8(1)$.

(c) Dies gilt nicht. Würde die Gleichheit gelten, so müsste $-2 \in B_4(1) \cap \mathbb{R} \subset f(B_1(0)) \cap \mathbb{R}$ auch in $f(B_1(0) \cap \mathbb{R}) = f((-1,1))$ liegen, es gäbe also ein $x \in (-1,1)$ mit $f(x) = -2$ also $-3 = 6x^6 - 2x^2 = 2x^2(3x^4 - 1)$. Damit der letzte Term negativ wird, muss $|x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ sein, dann ist aber $3x^4 - 1 \in (-1, 0)$ und $|2x^2| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$. Also ist dann $|6x^6 - 2x^2| < 2$ und die Gleichung $-3 = 6x^6 - 2x^2$ kann wegen $|-3| = 3 > 2$ nicht erfüllt sein. Also sind die Mengen nicht gleich.

$\mathcal{J.F.B.}$