Frühjahr 14 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Es seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> (a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.
>
> (b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t), x(0) = 0$.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir bestimmen das Matrixexponential und hierzu die Eigenwerte. Das charakteristische Polynom lautet $(1-\lambda)(\lambda^2-1)$ mit doppelter Nullstelle 1 und einfacher Nullstelle -1. Der Eigenraum von 1 ist eindimensional, die Matrix ist also nicht diagonalisierbar. Um die Jordannormalform zu bestimmen, werden wir daher eine Jordankette berechnen.

Als Eigenvektor zu -1 wählen wir $(1,-1,0)$. Weiter ist $(A-\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mit Kern $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}((1,0,2),(0,1,-2))$. Wir wählen als erstes Kettenglied $(1,0,2)$ und berechnen $(A-\mathbb{1})(1,0,2) = (3,3,0)$. Nach Inversion der entstehenden Matrix erhalten wir

$$A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt dann wegen $\exp\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$, nach einer länglichen Rechnung $\exp(tA) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3\cosh(t) & 3\sinh(t) & 18te^t + 6\sinh(t) \\ 3\sinh(t) & 3\cosh(t) & 18te^t - 6\sinh(t) \\ 0 & 0 & 12e^t \end{pmatrix}$. Weil Multiplikation mit einer Konstanten wieder zu einem Fundamentalsystem führt, können wir noch mit 4 multiplizieren, um das Fundamentalsystem $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 6te^t + 2\sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 6te^t - 2\sinh(t) \\ 0 & 0 & 4e^t \end{pmatrix}$ zu erhalten.

(b) Wir multiplizieren den Vektor $b(0)$ an das letzte Fundamentalsystem und erhalten damit die Lösung $x(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

J.F.B.