Frühjahr 2014 Thema 3 Aufgabe 5

mks

9. Mai 2025

Es seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = 0$.

Lösung:

a)

Zunächst berechnet man Eigenwerte und Eigenräume:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2/3} = \pm 1, \quad \operatorname{alg}(A, -1) = 1, \quad \operatorname{alg}(A, 1) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Z2=Z2-Z1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Z3=Z3+2Z2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z = 0, y = \alpha, x = -\alpha$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Z2=Z2+Z1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z = 0, y = \alpha, x = \alpha$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(A, -1) = \ker(A, -1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \operatorname{geo}(A, -1) = \operatorname{def}(A, -1) = 1, \quad \mathrm{E}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \operatorname{geo}(A, 1) = 1$$

Wegen $\sum_k \operatorname{geo}(A, \lambda_k) = 2 \neq 3$ ist A nicht diagonalisierbar. Es müssen also noch die weiteren Haupträume berechnet werden. Wegen $\operatorname{alg}(A, 1) = 2$ und $\operatorname{geo}(A, 1) = 1$ müssen wir nur noch hier suchen.

$$(A - 1\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Z2=Z2+Z1}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z = \alpha, y = \beta, x = \beta + \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\Rightarrow H^2(A, 1) = \ker((A - 1\mathbb{1})^2) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \, h^2(A, -1) = 2$$

Jetzt könnte man zur Berechnung des Fundamentalsystems die Jordan-Normalform aufstellen und $e^A = T^{-1} \cdot e^D \cdot e^N \cdot T$ anwenden. Falls man will und darf kann man auch den folgenden Satz anwenden:

Sei λ ein reeller Eigenwert mit $\operatorname{alg}(A, \lambda) = 2$ und $\operatorname{geo}(A, \lambda) = 2$ und sei $w \in H^2(A, \lambda)$. Dann ist $\{e^{\lambda t}, e^{\lambda t}(w + tv)\}$ Teil des Fundamentalsystems, wobei $v = (A - \lambda \mathbb{1})w$ ist.

Hie wird dieser, etwas kürzere Weg gewählt. Dazu wählen wir $w = (1, 0, 2)^T$, wobei darauf zu achten ist, dass $w \in H^2(A, 1)$ und $w \notin H^1(A, 1) = \mathrm{E}(A, 1)$ gilt. Jetzt rechnen wir noch

$$v = (A - 1\mathbb{1})w = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Fundamentalsystem

$$\mathbb{L}_h = \left\{ e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 3t \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

wobei noch der Vektor $(3, 3, 0)^T$ zu $(1, 1, 0)^T$ gekürzt wurde. Das ist für das Fundamentalsystem erlaubt, zur Berechnung einer Transformationsmatrix für e^A jedoch nicht, da diese sonst nicht mehr zu J passt. Hier müsste man dann aus allen 3 Basisvektoren mit demselben Faktor kürzen.

b)

Ein allgemeiner Weg zur Berechnung der Lösung eines linearen Anfangswertproblems ist über die Formel der Variation der Konstanten

$$x(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}(x_0 - x_p(t_0)) + x_p(t) \quad \text{mit} \quad x_p(t) = \int_0^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, \mathrm{d}s.$$

wobei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems ist. In unserem Fall z.B.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^t & (3t+1)e^t \\ e^{-t} & e^t & 3te^t \\ 0 & 0 & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Da das Invertieren von $\Phi(t)$ oft und auch in diesem Fall relativ aufwendig und fehleranfällig ist, nutzen wir die allgemeinere Aussage $\mathbb{L} = \mathbb{L}_h + x_p$ und versuchen eine partikuläre Lösung x_p zu raten.
In diesem Fall nehmen wir z.B. an, es würde eine konstante Lösung $x(t) = v$ geben. Dann würde gelten $\dot{x} = 0$ und x würde das lineare Gleichungssystem $Ax = -b$ lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z1} \leftrightarrow \text{Z2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad z = 0, y = -1, x = 0$$

Es gibt also tatsächlich eine konstante, partikuläre Lösung $x_p(t) = (0, -1, 0)^T$. Zur Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems müssen wir nun noch die Koeffizienten in $x(0)$ bestimmen:

$$x(0) = x_h(0) + x_p(0) = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z2=Z2+Z1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c = 0, b = \tfrac{1}{2}, a = \tfrac{1}{2}$$

Wir erhalten also als Lösung des AWP

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$