Frühjahr 14 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es seien $f, g : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ holomorph, f habe in i einen Pol und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$f\left(i + \frac{1}{n}\right) = g\left(i + \frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Entweder $f = g$ oder es gibt eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{i\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i = \lim_{n\to\infty} g(z_n).$$

(Hinweis: Untersuchen Sie den Typ der Singularität von g im Punkt i.)

Lösungsvorschlag:

Wenn $f = g$ gilt, muss für jede komplexe Folge z_n mit Grenzwert i die Folge $g(z_n) = f(z_n)$ gegen ∞ streben und kann nicht gegen i konvergieren. Es tritt also höchstens einer der beiden Fälle auf. Wir zeigen, dass immer einer der Fälle auftritt.
Die Singularität von g bei i kann nicht hebbar sein, weil aus $f(i + \frac{1}{n}) = g(i + \frac{1}{n})$ folgt, dass g bei i unbeschränkt ist. Wenn g bei i einen Pol besäße, so wäre dieser von der gleichen Ordnung wie der von f : Sei i ein Pol n-ter Ordnung von f, dann ist $f(z)(z-i)^{n-1}$ bei i unbeschränkt und $f(z)(z-i)^n$ bei i beschränkt. Dann existiert der Grenzwert $w := \lim\limits_{z\to i} f(z)(z-i)^n$ nach Riemanns Hebbarkeitssatz. Es ist also

$$\infty = \lim_{n\to\infty} f\left(i + \frac{1}{n}\right)\left(i + \frac{1}{n} - i\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} g\left(i + \frac{1}{n}\right)\left(i + \frac{1}{n} - i\right)^{n-1}$$

und

$$w = \lim_{n\to\infty} f\left(i + \frac{1}{n}\right)\left(i + \frac{1}{n} - i\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} g\left(i + \frac{1}{n}\right)\left(i + \frac{1}{n} - i\right)^{n},$$

woraus folgt, dass auch g einen Pol n-ter Ordnung bei i besitzt. Die Funktionen $\tilde{f} := f(z)(z-i)^n$ und $\tilde{g}(z) := g(z)(z-i)^n$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar und damit nach dem Identitätssatz identisch auf $\mathbb{C}$, weil die Menge $\{i + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ sich in $i \in \mathbb{C}$ häuft und $\tilde{f} = \tilde{g}$ auf dieser gilt. Für $z \neq i$ folgt dann aber auch $f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-i)^n} = \frac{\tilde{g}(z)}{(z-i)^n} = g(z)$ und es folgt $f = g$.
Wenn g bei i einen Pol besitzt, folgt also $f = g$ und der erste Fall tritt ein. Ist dagegen i eine wesentliche Singularität von g, so folgt der zweite Fall aus dem Satz von Casorati, weil $g(B_{\frac{1}{n}}(i)\backslash\{i\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Wir finden für alle $n \in \mathbb{N}$ also ein $i \neq z_n \in B_{\frac{1}{n}}(i)$ mit $|g(z_n) - i| < \frac{1}{n}$ und die Folge z_n hat die gewünschte Eigenschaft.

$\mathcal{J.F.B.}$