Frühjahr 2014 Thema 3 Aufgabe 2

mks

14. Mai 2025

Es seien $f, g : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ holomorph, f habe in i einen Pol und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$f\left(i + \frac{1}{n}\right) = g\left(i + \frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Entweder $f = g$ oder es gibt eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{i\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i = \lim_{n\to\infty} g(z_n).$$

Hinweis: Untersuchen Sie den Tp der Singularität von g im Punkt i.

Lösung:

Angenommen, die Singularität von g in i ist wesentlich. Dann sagt der Satz von Casorati–Weierstraß, dass es für jedes $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = a$. Wir wählen $a = i$, so haben wir eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$.

Ist die Singularität von g bei i nicht wesentlich, so ist auch die Singularität von $f - g$ bei i nicht wesentlich, da f holomorph ist. Somit existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $h : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = (z - i)^m(f(z) - g(z))$ eine hebbare Singularität bei i besitzt.
Sei $\tilde{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die ganze Fortsetzung von h. Dann gilt $\tilde{h}(i + \frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(i + \frac{1}{n}) = i$ ist i ein Häufungspunkt von $K \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{h}(z) = 0\}$. Der Idenditätssatz sagt dann, dass $\tilde{h}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit folgt $0 = \tilde{h}(z) = (z - i)^m(f(z) - g(z))$. Da $(z - i)^m \neq 0$ auf $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ muss dort also $f = g$ gelten.