Frühjahr 14 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Entscheiden Sie, bei welchem der drei Paare von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ es eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt:
>
> a) $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
>
> b) $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$;
>
> c) $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$ und $\mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

a) Hier gibt es keine solche Abbldung. Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{2\} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Abbildung, dann ist f beschränkt, also auch beschränkt in einer Umgebung von 2. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz handelt es sich bei 2 um eine hebbare Singularität und es existiert eine holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$. Die Fortsetzung ist ebenfalls beschränkt (durch $\max\{1, |f(2)|\}$) und ganz, nach dem Satz von Liouville also konstant. Demnach ist auch $f : \mathbb{C}\backslash\{2\} \to \mathbb{E}$ konstant und kann nicht bijektiv sein.

b) Hier existieren solche Abbildungen. Beide Mengen sind offen, sternförmig bzgl. 1 also einfach zusammenhängend, nichtleer, weil sie 1 enthalten und nicht $\mathbb{C}$, weil sie -1 nicht enthalten. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existieren biholomorphe Abbildungen $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0], g : \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ und $g \circ f^{-1}$ ist eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Mengen.

c) Man könnte Riemanns Abbildungssatz und den Satz von Liouville kombinieren, um zu zeigen, dass keine solche Funktion existiert, wir gehen hier aber mit dem Satz von Piccard vor. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ oder $f(\mathbb{C}) = \{w\}$ für ein $w \in \mathbb{C}$ oder $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{w\}$ für ein $w \in \mathbb{C}$. In keinem der drei Fälle ist das Bild $\mathbb{S}$, es gibt also keine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$.
Wir gehen hier noch genauer auf die Behauptung über $f(\mathbb{C})$ ein: Falls f ein Polynom ist, ist f konstant ($f(\mathbb{C}) = \{w\}$) oder surjektiv ($f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$) nach dem Fundamentalsatz der Algebra. Falls f transzendent ist, finden wir eine unendliche Potenzreihendarstellung von f um 0, die für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, also $a_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Die Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, g(z) = f(\frac{1}{z})$ besitzt die Laurentreihendarstelllung $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$, welche nie abbricht, also bei 0 eine wesentliche Singularität aufweist. Nach dem Satz von Piccard ist $f(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = g(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}\backslash\{w\}$ für ein $w \in \mathbb{C}$. Also ist $f(\mathbb{C}) = f(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \cup \{f(0)\}$ ebenfalls von der Form $\mathbb{C}\backslash\{w\}$ oder $\mathbb{C}$, falls $f(0) = w$ gilt.

J.F.B.