Frühjahr 14 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1{,}1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{z^2}{z^2-1}$.

a) Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie das Residuum.

b) Zeigen Sie, dass für $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ die Einschränkung $f_U : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z^2}{z^2-1}$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt.

Lösungsvorschlag:

a) Beide Singularitäten (± 1) sind einfache Nullstellen des Nenners, für die der Zähler nicht verschwindet. Es handelt sich also um Pole erster Ordnung, für die wir das Residuum mittels $\operatorname{Res}_f(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^2}{2\cdot(\pm 1)} = \pm\frac{1}{2}$ berechnen können.

b) Sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Weil f holomorph auf der konvexen offenen Menge $\mathbb{C}$ ist, abgesehen von den beiden, demnach endlich vielen, Singularitäten und der Weg keine Singularität berührt, können wir mit dem Residuensatz das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ berechnen. Weil γ nur in U verläuft stimmen die Windungszahlen um -1 und 1 überein. Es gilt also $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\operatorname{Ind}_1(\gamma) - \frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{-1}(\gamma) = 0$ für alle solchen Wege γ. Weil U offen und wegzusammenhängend ist, f stetig auf U ist, und jedes Pfadintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet, existiert eine holomorphe Stammfunktion von f auf U ($z \mapsto \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$, wobei $\gamma : [0{,}1] \to U$ ein C^1-Weg mit $\gamma(0) = 2, \gamma(1) = z$ ist).

$\mathcal{J.F.B.}$