F14T2A3

Berechne für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 2e^{2it}$ und $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto i + e^{-it}$ die Kurvenintegrale:

a) $\int\limits_\gamma \frac{e^{iz^2}-1}{z^2} dz$

b) $\int\limits_\eta \frac{e^z}{(z-i)^3} dz$

c) $\int\limits_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz$

Zu a):

$z \neq 0$:

$$\frac{e^{iz^2}-1}{z^2} dz = \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(iz^2)^k}{k!}\right) - 1}{z^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(iz^2)^k}{k!}}{z^2} = \frac{z^2 i \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(iz^2)^l}{(l+1)!}}{z^2} = i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz^2)^l}{(l+1)!}$$

gibt in 0 eine analytische Fortsetzung.

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz^2)^l}{(l+1)!}$$

von $\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{e^{iz^2}}{z^2}$, also ist

$$\int\limits_\gamma \frac{e^{iz^2}-1}{z^2} dz = \int\limits_\gamma f(z) dz = 0$$

nach Cauchy-Integralsatz.

Zu b):

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^z$ holomorph, η als geschlossener Weg nullhomolog in $\mathbb{C}$, also gilt laut Cauchy-Integralformel (für die 2. Ableitung)

$$n(\eta, i) \exp''(i) = \frac{2!}{2\pi i} \int\limits_\eta \frac{e^z}{(z-i)^{2+1}} dz$$

$$n(\eta, i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\eta \frac{dz}{z-i} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{-ie^{-it}}{e^{-it}} dt = -1$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_\eta \frac{e^z}{(z-i)^3} dz = -\pi i e^i$$

Zu c):

Für $z \neq 0$ ist $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$ die Laurentreihe von $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$, da es hier ∞-viele Terme ungleich 0 im Hauptteil gibt, ist 0 eine wesentliche Singularität von f. $\text{Res}(f, 0) = 1$ (Koeffizient von $\frac{1}{z}$ in dieser Laurentreihe).

Spur$\gamma \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$, γ nullhomolog in $\mathbb{C} = (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \cup \{0\}$

$$\overset{\text{Residuensatz}}{\Longrightarrow} \quad \int\limits_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \ \text{Res}(f, 0) \underbrace{n(\gamma, 0)}_{=2} = 4\pi i$$