Frühjahr 14 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die matrixwertige Funktion $A :]-1,1[\to \mathbb{R}^{2\times 2}, t \mapsto \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & \frac{2t}{t^2-1} \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige maximale Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

Lösungsvorschlag:

Alle Matrixeinträge sind stetige Funktionen auf $]-1,1[$, die Differentialgleichung ist also linear von erster Ordnung mit stetigen Koeffizienten. Demnach existiert zu jedem Anfangswert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung $x :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$.
Wir schreiben $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, dann muss x_2 das Anfangswertproblem $y' = \frac{2t}{t^2-1}y, y(0) = 1$ lösen. Wegen $\ln(1-t^2)' = \frac{2t}{t^2-1}$ folgern wir, dass $x_2(t) = 1 - t^2$ ist.
Daraus ergibt sich nun, dass x_1 eine Lösung des Anfangswertproblems
$y' = 2ty + t - t^3, y(0) = 2$ ist. Die Lösung der homogenen Gleichung ist
$y(t) = e^{t^2}$. Durch Raten oder mittels Variation der Konstanten finden wir die partikuläre Lösung $y(t) = \frac{1}{2}t^2$, die allgemeine Lösung hat also die Form $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + ce^{t^2}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ impliziert nun $c = 2$.
Wir folgern, dass $x(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2e^{t^2}, 1 - t^2)$ die Lösung des Anfangswertproblems ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$