F14T2A1

$$x' = \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x(0) = 1$$

Zeige:

a) Das obige Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

b) Für das maximale Lösungsintervall gilt: $I = \mathbb{R}$.

c) Für alle $t \geq 0$ ist $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$.

Zu a):

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}}$$

stetig (partiell) differenzierbar, also stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der 2. Variablen x. Also hat die Differentialgleichung laut globalem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

Zu b):

$$|f(t,x)| = \frac{|xt|}{\sqrt{x^2+1}} \leq |t|$$

ist linear beschränkt, daher hat das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(\tau) = \xi$ das maximale Lösungsintervall $= \mathbb{R}$ nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit linear beschränkter rechter Seite.

Zu c):

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \int_0^t \lambda'(s)ds = 1 + \int_0^t \frac{\lambda(s) \cdot s}{\sqrt{(\lambda(s))^2+1}}ds$$

$\lambda_{(0,0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ ist maximale Lösung zu $x' = f(t,x)$, $x(0) = 0$.
Die Graphen von λ und $\lambda_{(0,0)}$ sind disjunkt, also gilt laut Zwischenwertsatz $\lambda(t) > 0$.

$$\Rightarrow 0 < \frac{\lambda(s)}{\sqrt{(\lambda(s))^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \lambda(t) \in \left[1, 1 + \frac{t^2}{2}\right]$$