Frühjahr 14 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Berechnen Sie unter Benutzung von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ für $\lambda > 0$ das Integral

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Wenden Sie für reelles $R > 0$ den Cauchy-Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm R, \pm R + i\lambda/2$ an und betrachten Sie $R \to \infty$.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^{-z^2}$ und für $R > 0$ den Weg γ_R, der durch Aneinanderhängen der folgenden vier Wege entsteht:

$$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t \qquad \gamma_2 : [0, \lambda/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto R + it$$
$$\gamma_3 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto i\lambda/2 - t \qquad \gamma_4 : [-\lambda/2, 0] \to \mathbb{C}, t \mapsto -R - it$$

Offensichtlich ist γ_R geschlossen und stückweise stetig differenzierbar, weshalb nach Cauchys Integralsatz $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$ für alle $R > 0$ gilt.
Wir werten die vier Teilwege jetzt getrennt aus. Es gilt $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, was für $R \to \infty$ gegen $\sqrt{\pi}$ konvergiert.
Für γ_2 und γ_4 verschwindet der Beitrag zum Integral im Unendlichen, wir zeigen dies hier ausführlich für γ_2, die Rechnungen gehen sehr ähnlich für γ_4. Für $t \in [0, \lambda/2]$ gilt $-\gamma_2(t)^2 = -R^2 + t^2 - 2Rit$, also ist $|f(\gamma_2(t))| = e^{t^2-R^2} \le e^{\lambda^2/4-R^2}$. Damit folgt $0 \le |\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z| \le |\gamma_2'| \max\limits_{t\in[0,\lambda/2]} |f(\gamma_2(t))| \le \lambda/2 e^{\lambda^2/4-R^2}$, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Völlig analog folgt $\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z \to 0$ für $R \to \infty$.
Für $t \in [-R, R]$ ist $f(\gamma_3(t)) = \exp(\lambda^2/4 - i\lambda t - t^2) = e^{\lambda^2/4}e^{-t^2}(\cos(\lambda t) - i\sin(\lambda t))$, also folgt nach Einsetzen in die Definition des Wegintegrals und Substitution $s = -t$, dass $\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} e^{\lambda^2/4}e^{-t^2}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t - i\int_{-R}^{R} e^{\lambda^2/4}e^{-t^2}\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ ist, was für $R \to \infty$ konvergiert (bei den Integralen ist $e^{\lambda^2/4}e^{-t^2}$ eine Majorante, deren Integral existiert folglich).
Aus $0 = \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \sum\limits_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z$ folgt im Grenzübergang $R \to \infty$ nun $0 = \sqrt{\pi} - e^{\lambda^2/4}(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t + i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t)$, woraus durch Umstellen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4}$ folgt (betrachte entweder nur den Realteil oder bemerke, dass $e^{-t^2}\sin(\lambda t)$ ungerade ist und das zugehörige Integral demnach 0 ist).
Wir sollen nur über die Halbachse integrieren, weil $e^{-t^2}\cos(\lambda t)$ aber gerade ist, folgt $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 1/2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2e^{-\lambda^2/4}$.

$\mathcal{J.F.B.}$