F14T1A3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\cos(x)$$

a) Wandle diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein äquivalentes System erster Ordnung mit den Variablen x und y um.

b) Hat diese Differentialgleichung für jede Anfangsbedingung eine eindeutige maximale Lösung?

c) Sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

d) Man zeige, dass die Funktion $S(x,y) = 2\sin(x) + y^2$ ein erstes Integral ist.

zu a):

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \ddot{x} = -\cos(x)$$

zu b):

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar, also stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. (x,y). Nach dem globalen Existenz- und Eindeiutigkeitssatz hat jedes Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(t,x,y), \quad \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \xi$$

(mit $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$) eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}^2$.

zu c):

$$||f(t,x,y)||_1 = \left|\left| \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix} \right|\right|_1 = |y| + |\cos(x)| \leq |y| + 1 \leq \left|\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|\right|_1 + 1$$

für alle $t,x,y \in \mathbb{R}$, also ist f linear beschränkt. Somit ist $I_{(\tau,\xi)} = \mathbb{R}$ laut Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit linear beschränkter rechter Seite.

zu d):

$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2\sin(x) + y^2$ ist erstes Integral.

$$\langle (\text{grad } S) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix} \rangle = 0$$